Control 1: Optimización

Profesor : Alejandro Jofré
Auxiliares : Nicolás Hernández & Emilio Vilches
10 de Septiembre

Problema 1.
Una empresa fabrica un producto x, que vende en el mercado a un precio de 1 por unidad. Para generar este producto y ser capaz de venderlo, la empresa necesita de un insumo y, que compra en el mercado a un precio de 1 por unidad. La cantidad del insumo y que necesita para producir x viene dada por la regla de producción:

$$y = x^2$$

Por restricciones de disponibilidad del mercado suponga que la empresa se enfrenta a la restricción adicional:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

La ganancia por venta G viene dada por la cantidad de x que se vende en el mercado (asuma que todo lo que se produce se vende), mientras que el costo de producción C viene dado por la cantidad del insumo y que se requiere para producir x. De esta manera las utilidades son $G - C$.

a) Plantee el problema de maximización de utilidades que debe resolver la empresa para decidir cuanto producir. (Note que dado lo que representan las variables x e y es ilógico considerar ciertos valores).

b) Encuentre los candidatos de KKT a mínimos locales del problema anterior. Para esto haga el siguiente análisis de casos:

i) Suponga que el multiplicador asociado a la restricción $x \geq 0$ es distinto de cero y concluya que no hay candidatos que cumplan esto.

ii) Sabiendo ahora que uno de los multiplicadores es cero, suponga que el multiplicador asociado a la restricción $y \geq 0$ es distinto de cero y concluya que no hay candidatos que cumplan esto.

iii) Resuelva los casos restantes.

c) Justifique si estos candidatos son o no mínimos globales y resuelva el problema.

Problema 2. 1. Considere el problema

$$(\mathcal{P}_\alpha) \left\{ \begin{array}{ll} \text{mín} & (x-1)^2 + y^2 \\ \text{s.a} & -x + \alpha y^2 = 0 \end{array} \right.$$

a) Mostrar que $\bar{x} = (0,0)$ verifica las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden.

b) Usando condiciones de segundo orden decidir en función de α cuando $\bar{x}$ es un mínimo local para $(\mathcal{P}_\alpha)$.

Solución.

a) Sean $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ y $h(x,y) = -x + \alpha y^2$. Es claro que f y h son continuamente diferenciables y

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\alpha y \end{pmatrix} \neq (0,0).$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Si $\bar{x} = (0,0)$ es un mínimo local (o un máximo local) de f sobre la restricción $h(x,y) = 0$, entonces existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda} \nabla h(\bar{x}) = 0$. Lo cual se cumple con $\bar{\lambda} = -2$.

b) Calculamos el cono de direcciones críticas $K(\bar{x})$.

$$K(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{array}{c} \nabla h(\bar{x})^t d = 0 \\ \nabla f(\bar{x})^t d \leq 0 \end{array} \right\} = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Además para $d = (d_1, d_2)^t \in K(\bar{x})$

$$d^t \left(\nabla^2 f(\bar{x}) + \bar{\lambda} \nabla^2 h(\bar{x}) \right) d = 2(1 - 2\alpha) d_2^2$$

por lo tanto:

- si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\bar{x} = (0,0)$ no puede ser un mínimo local de f sobre la restricción $h(x,y) = 0$;

- si $\alpha < \frac{1}{2}$, $\bar{x} = (0,0)$ es un mínimo local de f sobre la restricción $h(x,y) = 0$;

- si $\alpha = \frac{1}{2}$, no se puede decidir con la ayuda de las condiciones de primer y segundo orden.

2. Considere el problema

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{mín} & -x - y - yz - xz \\ \text{s.a} & x + y + z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

a) ¿Es $(\mathcal{P})$ un problema convexo?.

b) Determinar los puntos que verifican las condiciones necesarias de primer orden. Entre estos puntos ¿cuales son los que verifican las condiciones de segundo orden?.

c) Encuentre los mínimos globales de $(\mathcal{P})$.

Solución.

a) Sean $f(x,y,z) = -x - y - yz - xz$ y $h(x,y,z) = x + y + z - 3$. La función objetivo es cuadrática, con

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero $\nabla^2 f(x,y,z)$ no es semidefinida positiva, luego f no es convexa. Por lo tanto el problema no es un problema de minimización convexa.

b) Un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ verifica las condiciones necesarias de primer orden cuando

$$\begin{array}{l} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 3 \\ \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R} \text{ tal que } -1 - \bar{x}_3 + \bar{\lambda} = 0 \text{ y } -\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{\lambda} = 0. \end{array}$$

este sistema de ecuaciones conduce a que $\bar{\lambda} = 2$ y $\bar{x} = (\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1)$, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$.
Calculamos el cono de direcciones críticas $K(\bar{x})$:

$$K(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{array}{c} \nabla h(\bar{x})^t d = 0 \\ \nabla f(\bar{x})^t d \leq 0 \end{array} \right\} = \{(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 \colon d_1 + d_2 + d_3 = 0\}.$$

luego

$$\forall d = (d_1, d_2, d_3) \in K(\bar{x}), \quad d^t \nabla^2_{xx} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) d = 2(d_1 + d_2)^2 = 2d_3^2.$$

entonces, todos los puntos $\bar{x} = (\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1)$ verifican las condiciones necesarias de primer orden.
Sea $d = (d_1, -d_1, 0)$ con $d_1 \neq 0$; es claro que $d \in K(\bar{x}) \setminus \{0\}$ y $d^t \nabla^2_{xx} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) d = 0$. Entonces, ninguno de los puntos $(\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1)$ verifica las condiciones suficientes de minimalidad (estricta) de segundo orden.
Por otro lado,

$$f(\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1) = -4$$

y

$$f(x_1, x_2, x_2) - (-4) = (x + y - 2)^2 \geq 0$$

para todo punto en el conjunto de restricciones S. Por lo tanto, todos los puntos $(\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1)$ son mínimos globales de f sobre S.

Observación: El hecho de que no se pueda verificar las condiciones suficientes de minimalidad (estricta) en un punto $(\bar{x}_1, 2 - \bar{x}_1, 1)$ se explica por el hecho de que f es constante sobre la recta $\{(x, 2 - x, 1) \colon x \in \mathbb{R}\}$.