

# OPTIMIZACION PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA <sup>1</sup>

Jorge Amaya A.  
Departamento de Ingeniería Matemática y  
Centro de Modelamiento Matemático  
Universidad de Chile

(**CAPITULOS 1 al 4**)

13 de junio de 2009

<sup>1</sup>Texto para uso exclusivo de los estudiantes del curso **Optimización**, de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. Los comentarios son bienvenidos: [jamaya@dim.uchile.cl](mailto:jamaya@dim.uchile.cl)

El presente texto corresponde a un intento de convertir en apunte formal mis clases de Optimización en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile, durante los últimos 10 años. El texto está diseñado para usado como guía de estudio en un curso de tercer año universitario y supone conocimientos sólidos de Álgebra Lineal y Cálculo en Varias Variables Reales. Los énfasis están en los fundamentos matemáticos de la Optimización y, en esa misma medida, pretende motivar a estudiantes de ingeniería de todas las especialidades con el modelamiento y la resolución de problemas de Optimización de muy variada índole.

El primer capítulo está destinado al análisis de las funciones y conjuntos convexos, orientado especialmente a los conceptos geométricos de poliedros y sus propiedades. La caracterización de la optimalidad para Optimización no Lineal se trata en el segundo capítulo. La Programación Lineal está cubierta esencialmente en el tercer capítulo y en el cuarto se hace una aplicación de ella a los problemas de flujos en redes, particularmente los de flujo de costo mínimo, de flujo máximo, de asignación y de camino más corto, todos de mucho interés para la formación de ingenieros y de frecuente aparición en la vida profesional. Los algoritmos numéricos de resolución de problemas de Programación no Lineal son tratados en el quinto capítulo. Tanto por la supuesta complejidad de su tratamiento matemático como por la dificultad de implementación de algunos algoritmos, habitualmente a este tema se le otorga una importancia secundaria. Cada día es más frecuente encontrar, en la práctica profesional y en la investigación, problemas reales de Optimización con componentes no lineales. Por una parte, la linearización de estos componentes puede permitir su solución mediante el uso reiterado de la Programación Lineal y, por otra, la resolución directa por métodos de Programación no Lineal es a menudo muy costosa o ineficiente. En este capítulo tratamos separadamente los casos de problemas con y sin restricciones.

Los contenidos de este texto son de conocimiento universal, es decir, se encuentran extensamente publicados en la literatura especializada. Nuestro esfuerzo aquí no ha sido en absoluto crear una nueva teoría sino más bien recopilar de manera unificada y coherente los elementos más esenciales de un curso introductorio a la Optimización para estudiantes de ingeniería y ciencias afines. Este trabajo se ha realizado con la colaboración de mis ayudantes y auxiliares, y alimentado por la constante interpelación de los estudiantes. Agradezco particularmente a Nancy Silva, la primera en convertir mis notas de clase en un texto limpio. También mi agradecimiento a José Saavedra y a Rodrigo Escudero, quienes en diferentes momentos han contribuido a mejorar el texto.

**Jorge Amaya A.**

**Marzo de 2009**

# Índice general

<b>1. Matemáticas para la Optimización</b>	<b>4</b>
1.1. Conjuntos convexos . . . . .	5
1.1.1. Poliedros: caracterización y propiedades . . . . .	11
1.1.2. Puntos extremos . . . . .	13
1.1.3. Direcciones y direcciones extremas . . . . .	20
1.1.4. Proyección sobre conjuntos convexos . . . . .	24
1.1.5. Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan . . . . .	27
1.2. Funciones convexas . . . . .	33
1.2.1. Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas . . . . .	37
1.2.2. Funciones convexas diferenciables . . . . .	38
1.2.3. Funciones no diferenciables: concepto de subgradiente . . . . .	44
<b>2. Caracterización de optimalidad</b>	<b>46</b>
2.1. Definición del problema de Optimización . . . . .	46
2.2. Condiciones de optimalidad . . . . .	47
2.2.1. Optimización sin restricciones . . . . .	47
2.2.2. Optimización con restricciones . . . . .	49
<b>3. Programación Lineal</b>	<b>57</b>
3.1. Introducción y ejemplos . . . . .	57
3.2. Resolución de problemas de Programación Lineal: algoritmo Simplex . . . . .	59

3.2.1.	Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso . . . . .	61
3.2.2.	Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible	68
3.3.	Programación Lineal Entera (ramificación y acotamiento) . . . . .	72
<b>4.</b>	<b>Dualidad en Programación Lineal</b>	<b>77</b>
4.1.	Definición de dualidad y principales propiedades . . . . .	79
4.2.	Interpretación económica de la dualidad . . . . .	84
4.3.	Dual de cualquier problema lineal . . . . .	85
4.4.	Algoritmo Simplex-dual . . . . .	86
4.5.	Introducción al análisis post-optimal . . . . .	87
4.5.1.	Variación en los coeficientes de la función objetivo . . . . .	87
4.5.2.	Variación en el vector de recursos (o lado derecho) . . . . .	90
4.5.3.	Introducción de una nueva actividad (o variable) . . . . .	91
4.5.4.	Introducción de una nueva restricción . . . . .	93
<b>5.</b>	<b>Modelos y algoritmos para flujos en redes</b>	<b>97</b>
5.1.	Motivación y descripción de problemas clásicos . . . . .	97
5.1.1.	Problema de asignación . . . . .	100
5.1.2.	Problema de transporte . . . . .	101
5.1.3.	Problema de flujo máximo . . . . .	103
5.1.4.	Problema de camino más corto . . . . .	104
5.2.	Solución del problema de transporte . . . . .	105
5.2.1.	Solución básica factible inicial (Fase I) . . . . .	105
5.2.2.	Mejoramiento de una solución en curso (Fase II) . . . . .	106
5.3.	Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso (Fase II) . . .	111

# Capítulo 1

## Matemáticas para la Optimización

Un problema de optimización matemático, en términos generales, se escribe de la forma:

$$(P) \text{ minimizar (o maximizar) } f(x) \\ x \in S$$

donde  $x$  es el **vector de variables de decisión**,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es la **función objetivo** y  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  es el **conjunto factible**. A menudo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

y se dice que las expresiones  $g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$  representan el **conjunto de restricciones** del problema (P). Si  $S = \mathbb{R}^n$ , el problema se dirá **irrestringido**.

Un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  que pertenezca al conjunto  $S$  se llamará **solución factible** de (P). Si además satisface que

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S$$

(cuando se trata de un problema de minimización), se dirá que  $x$  es **solución óptima**.

Dependiendo de las características particulares del problema, éste recibe nombres y tratamientos especiales para su resolución. Dos casos de interés, son el de la **programación lineal** ( $f$  y  $g_i$  son funciones lineales afines  $\forall i$ ) y la **programación lineal entera** (en que además las variables sólo toman valores enteros). También trataremos la teoría y técnicas de solución de un problema con funciones no lineales.

Un concepto esencial para entender cómo plantear y resolver un problema de optimización es el de **convexidad**. Mostrar algo de la teoría básica del análisis convexo y su vinculación con la teoría de optimización son los objetivos del siguiente capítulo.

## 1.1. Conjuntos convexos

**Definición 1.1.1** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $S$  es **convexo**<sup>1</sup> si y sólo si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \quad \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Geoméricamente, esta definición se puede interpretar como sigue: *un conjunto no vacío es convexo si dados dos puntos del conjunto, el segmento de recta que los une está contenido en dicho conjunto* (ver Figura 1.1).

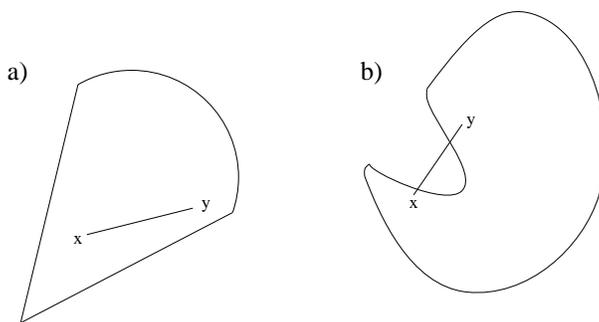


Figura 1.1: El conjunto de la figura a) es convexo. El conjunto de la figura b) no es convexo, pues existe un segmento de recta, uniendo dos puntos del conjunto, que no está incluido en el conjunto.

**Ejemplo 1.1.1** Un espacio vectorial es un conjunto convexo (en particular,  $\mathbb{R}^n$  lo es).

**Demostración.** Directo pues, por definición, un espacio vectorial es cerrado para la suma y la ponderación por escalar. ■

**Ejemplo 1.1.2**  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$  es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Por definición del conjunto  $S$ , esto significa que  $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$  e  $y_1 + 2y_2 - y_3 = 2$ .

---

<sup>1</sup>Por convención, el conjunto vacío será considerado convexo

Vemos que  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \\ \lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3 \end{bmatrix}$  pertenece a  $S$ , pues

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + 2\{\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2\} - \{\lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3\} &= \\ \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1 - \lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3) &= \\ 2\lambda + 2(1 - \lambda) &= 2 \end{aligned}$$

**Definición 1.1.2** Sean  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijos. Se llama **hiperplano** al conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$$

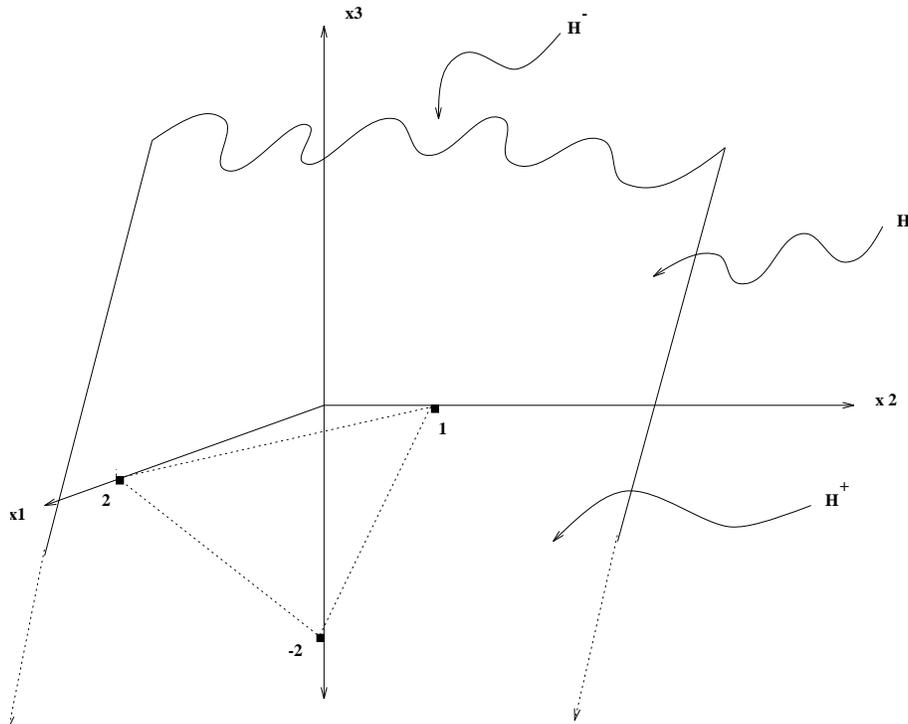


Figura 1.2: Semiespacios generados por el hiperplano  $H$

Un hiperplano  $H$  define dos **semiespacios**:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \geq \alpha\}$$

Por ejemplo, en el caso  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$  se tiene que  $a^T = (1, 2, -1)$  y  $\alpha = 2$ . Los dos semiespacios asociados son:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2\}.$$

**Ejemplo 1.1.3** *Un semiespacio  $S$  en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo.*

**Demostración.** Consideremos  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que definen el semiespacio

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}.$$

Sean  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$a^T \{\lambda x + (1 - \lambda)y\} = \lambda a^T x + (1 - \lambda)a^T y \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

Luego  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  y, por lo tanto,  $S$  es convexo. ■

**Proposición 1.1.1** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos convexos. Entonces  $S_1 \cap S_2$  es un conjunto convexo.*

**Demostración.** Sean  $x, y \in S_1 \cap S_2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces

$$x, y \in S_1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1$$

y

$$x, y \in S_2 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_2,$$

puesto que  $S_1$  y  $S_2$  son convexos.

Luego  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1 \cap S_2$ , es decir,  $S_1 \cap S_2$  es convexo. ■

**Observación 1.1.1** *Observemos que:*

- i) Esta propiedad se puede generalizar fácilmente a una intersección cualquiera de convexos. Esto es, si  $\Gamma$  es un conjunto arbitrario, incluso no numerable, y  $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  es una clase de conjuntos convexos, entonces  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$  es un conjunto convexo.*

ii) Aunque del ejemplo (1.1.3) puede concluirse fácilmente que un hiperplano es un conjunto convexo (reemplazando las desigualdades por igualdades), podemos usar esta proposición para probar que un hiperplano es un conjunto convexo, dado que es intersección de convexos.

**Ejemplo 1.1.4** Sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

con  $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

El sistema se anota  $Ax \leq b$ , con  $A = (a_{ij})_{i=1\dots m; j=1\dots n}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  es la intersección de  $m$  semiespacios de la forma

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n / A_i x \leq b_i\}$$

(donde  $A_i$  denota la fila  $i$ -ésima de la matriz  $A$ ), los cuales, según vimos en el ejemplo (1.1.3), son conjuntos convexos. Luego, por la proposición (1.1.1),  $S$  es convexo.

**Definición 1.1.3** Sean  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . El vector  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  se dice **combinación convexa** de los  $k$  vectores  $x_1, \dots, x_k$ .

**Definición 1.1.4** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se define el conjunto  $co(S)$ , llamado **envoltura convexa** de  $S$ , de la manera siguiente:

$$co(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^k \subseteq S, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \subseteq [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Notar que el conjunto  $S$  no es necesariamente convexo y  $co(S)$  es el conjunto de todas las posibles combinaciones convexas de puntos de  $S$ .

**Observación 1.1.2** Sean  $S, S' \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces:

- $S \subseteq co(S)$ .
- $S$  es convexo si y sólo si  $co(S) = S$ .
- Si  $S \subseteq S'$  entonces  $co(S) \subseteq co(S')$ .

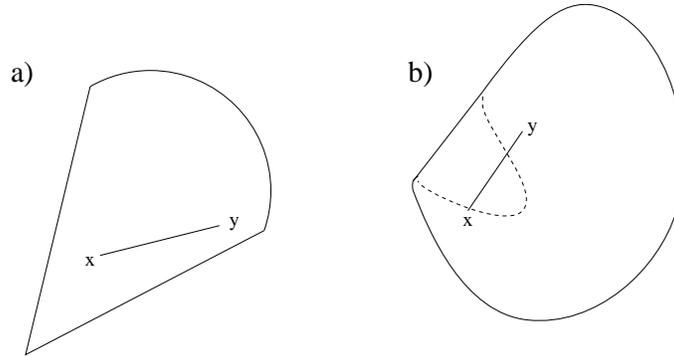


Figura 1.3: La envoltura convexa del conjunto de la figura a) coincide con él, por ser convexo. Para el conjunto de la figura b), la línea sólida delimita su envoltura convexa.

**Ejemplo 1.1.5** La envoltura convexa de los números racionales es  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.1.6** Sean  $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Su envoltura convexa queda determinada por el poliedro de la Figura 1.4, cuyos vértices están dados por el conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

**Proposición 1.1.2**  $co(S)$  es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $x, y \in co(S)$ , es decir,

$$x = \sum_{i=1}^k \nu_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$$

donde  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$  y  $\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ , son ponderadores de las combinaciones convexas.

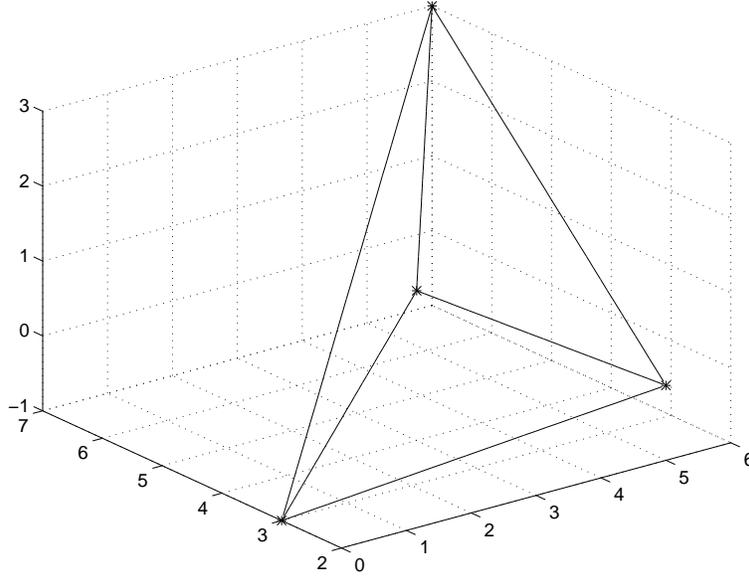


Figura 1.4: La envoltura convexa del conjunto de puntos señalados queda determinada por un poliedro cuyos vértices están dados por el conjunto de vectores.

Sea  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k \nu_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ .

Llamando  $z_i = x_i$ ,  $\alpha_i = \lambda \nu_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $z_{k+i} = y_i$ ,  $\alpha_{k+i} = (1 - \lambda) \mu_i$   $\forall i = 1, \dots, m$ , se tiene que  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i z_i$  con

$$z_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, k + m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i = 1.$$

Luego por definición se tiene que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{co}(S)$ , por lo tanto  $\text{co}(S)$  es convexo. ■

**Proposición 1.1.3** *El conjunto  $\text{co}(S)$  es el convexo más pequeño (en el sentido de la inclusión) que contiene a  $S$ , es decir,  $\text{co}(S) = \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ .*

**Demostración.** Sea  $x \in \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ . Entonces  $x \in C, \forall C$  convexo, tal que  $S \subseteq C$ . Luego  $x \in \text{co}(S)$ , que es un convexo particular que contiene a  $S$ .

Sean ahora  $x \in co(S)$  y  $C$  un convexo cualquiera que contiene a  $S$ . Entonces  $co(S) \subseteq co(C) = C$ , por lo tanto  $x \in C$ . Luego,  $x \in \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ . ■

**Ejercicio 1.1.1** Sean  $S_1$  y  $S_2$  convexos,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se define la suma y ponderación de conjuntos como sigue:

- $S_1 + S_2 = \{x + y / x \in S_1, y \in S_2\}$
- $\alpha S_1 = \{\alpha x / x \in S_1\}$

Pruebe que  $S_1 + S_2$  y  $\alpha S_1$  son convexos.

### 1.1.1. Poliedros: caracterización y propiedades

**Definición 1.1.5** Se llama **poliedro** a un conjunto de la forma  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  con  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , es decir, un poliedro es una intersección finita de semiespacios.

**Proposición 1.1.4**  $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  es un poliedro.<sup>2</sup>

**Demostración.** Claramente, el conjunto  $\mathcal{P}'$  queda representado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $I$  la matriz identidad en dimensión  $n$ .

Llamando  $A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$ ,  $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$ , se obtiene un sistema de la forma

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / A'x \leq b'\}$ , que es igual a  $\mathcal{P}'$ . Luego,  $\mathcal{P}'$  es un poliedro. ■

**Observación 1.1.3** Es obvio que  $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b\}$  es un poliedro. En efecto: como  $x \in \mathbb{R}^n$  es irrestricto, basta multiplicar el sistema de desigualdades por  $-1$ , y definir  $A' = -A$ ,  $b' = -b$ .

<sup>2</sup> $x \geq 0$  si y solamente si  $x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$

**Proposición 1.1.5** *Todo poliedro es un conjunto convexo.*

**Demostración.** Ver ejemplo (1.1.4). ■

Se dirá que un poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  está escrito en forma canónica. En lo sucesivo trabajaremos con esta representación.

**Proposición 1.1.6** *Un poliedro es un conjunto cerrado.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{P}$  el poliedro  $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  y consideremos  $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$  (adherencia o cerradura de  $\mathcal{P}$ ). Mostraremos que  $\bar{x} \in \mathcal{P}$ .

Como  $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$ , existe una sucesión  $\{x_k\}$  en  $\mathcal{P}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ .

Además,  $\forall k \geq 0$ , el punto  $x_k$  verifica

$$\begin{aligned} Ax_k &= b \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomando límite (y por continuidad de la función lineal  $x \mapsto Ax$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego  $\bar{x} \in \mathcal{P}$  y por lo tanto  $\bar{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ . Dado que se cumple siempre que  $\mathcal{P} \subseteq \bar{\mathcal{P}}$ , se obtiene  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ , luego  $\mathcal{P}$  es cerrado. ■

**Ejemplo 1.1.7**  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \geq 4, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ .

*Matricialmente esto puede escribirse de la siguiente manera:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*El conjunto  $C$  es un poliedro, convexo y cerrado, pero no acotado, tal como se aprecia en la Figura 1.5.*

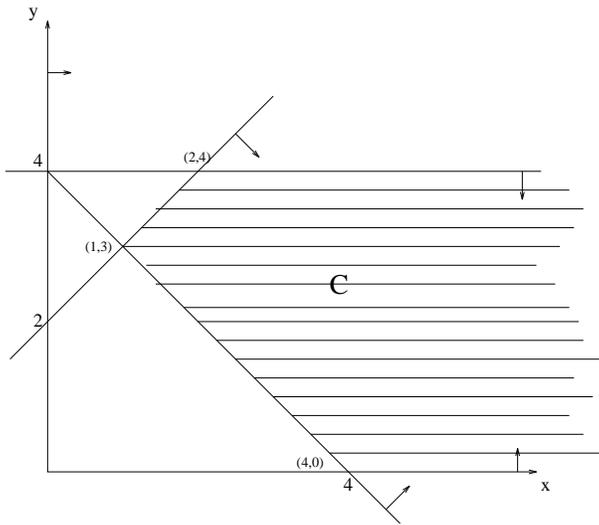


Figura 1.5: El conjunto C es un poliedro, convexo y cerrado, pero no acotado.

### 1.1.2. Puntos extremos

**Definición 1.1.6** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $S \neq \emptyset$ . Un vector  $x \in S$  se llama **punto extremo de S** si y sólo si no puede ser representado como combinación convexa de otros dos puntos distintos del convexo. Es decir, si  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in S$  y  $\lambda \in ]0, 1[$ , entonces  $x = x_1 = x_2$ .

**Ejemplo 1.1.8** Veamos tres casos de convexos y sus puntos extremos.

- Sea  $S=B(0,1)$ , la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto de puntos extremos queda representado por  $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ , que es la frontera de  $S$ .
- El conjunto de puntos extremos del poliedro del ejemplo (1.1.6) es

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- El conjunto de puntos extremos de un semiespacio cerrado es vacío.

**Ejemplo 1.1.9** Sean  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  y  $S = co\{U\}$

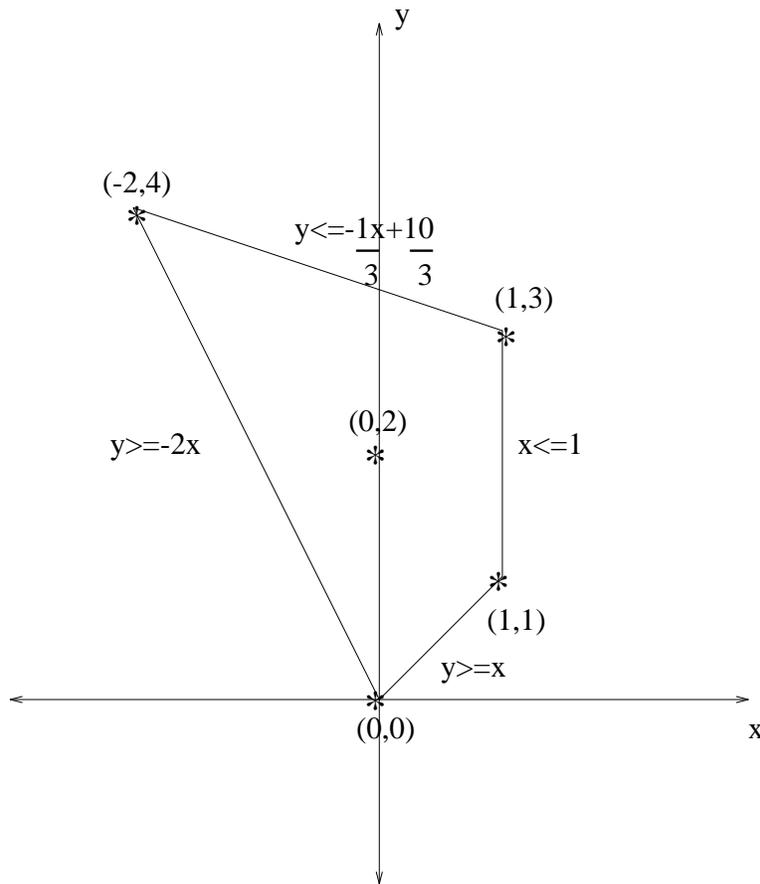


Figura 1.6: S es la envoltura convexa del conjunto U

Naturalmente, el conjunto de puntos extremos de S es  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ .

El sistema que representa a S es

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

En general, fácilmente se puede ver que  $x$  es punto extremo de un convexo  $S$  si y solamente si  $S \setminus \{x\}$  es un conjunto convexo, de donde se sigue que si  $S^*$  es tal que  $co(S^*) = S$ , entonces necesariamente  $S^*$  debe incluir al conjunto de puntos extremos de S.

La noción de punto extremo es de suma importancia en la teoría de optimización pues, como veremos más adelante, está en relación directa con el conjunto de soluciones para un problema de Programación Lineal, por lo cual es importante tener una caracterización simple. Veamos el siguiente ejemplo de motivación:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 \leq 2, \quad 8x_1 + 3x_2 \leq 8, \quad x_1, x_2 \geq 0\}$$

El gráfico se muestra en la Figura 1.7.

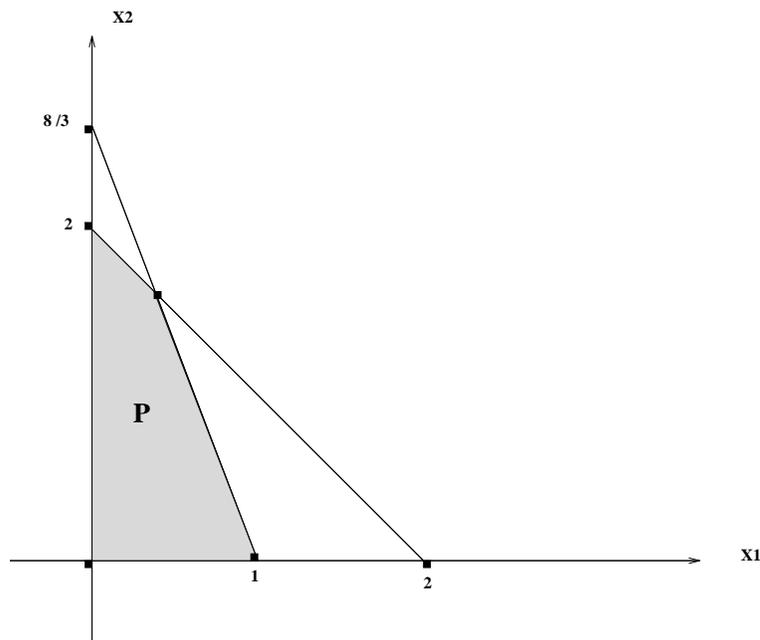


Figura 1.7: Ejemplo de motivación.

Los puntos extremos son  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ . Trabajaremos con el poliedro (en  $\mathbb{R}^4$ )

$$\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad 8x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$$

que es equivalente a  $\mathcal{P}$  en el sentido siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \exists x_3, x_4 \geq 0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}'.$$

Examinemos entonces el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\8x_1 + 3x_2 + x_4 &= 8 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Asignando valor nulo a dos variables cualesquiera podemos entonces resolver el sistema de dos ecuaciones cada vez. Esto da las soluciones

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se observa que dos de ellas (la tercera y la cuarta) no satisfacen la condición de positividad, luego no pertenecen a  $\mathcal{P}'$ . Sin embargo las cuatro soluciones restantes determinan en sus dos primeras coordenadas, los puntos extremos de  $\mathcal{P}$ , a saber:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esto se expresa en forma general en el siguiente teorema

**Teorema 1.1.1** *Sea un poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Un punto  $x$  es extremo de  $\mathcal{P}$  si y sólo si la matriz  $A$  se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma  $A = [B, N]$ , donde  $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  es invertible,  $N \in \mathcal{M}_{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$  corresponde a las columnas restantes y  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $B^{-1}b \geq 0$ .*

**Demostración.**

( $\Leftarrow$ ) Sea  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$ . Se tiene que  $x \in \mathcal{P}$ , pues

$$Ax = [B, N] \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = BB^{-1}b + N0 = b.$$

Sean  $u, v \in \mathcal{P}$  tales que  $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ , para algún  $\lambda \in ]0, 1[$ , es decir

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

De allí:

$$\begin{aligned}(1) \quad & \lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1 = B^{-1}b \\(2) \quad & \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2 = 0\end{aligned}$$

Como  $u, v \in \mathcal{P}$ , necesariamente  $u \geq 0, v \geq 0$ . Luego de (2) se tiene que  $u_2 = v_2 = 0$ .

Como  $u \in \mathcal{P}$  satisface  $Au = b$ , esto es  $[B, N] \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Bu_1 = b$  entonces  $u_1 = B^{-1}b$ , por lo tanto,  $u = x$ .

De la misma manera se prueba que  $v = x$ , con lo que se concluye que  $x$  es punto extremo.

( $\implies$ ) Supongamos ahora que  $x \in \mathcal{P}$  es un punto extremo. Eventualmente reordenando las columnas del sistema,  $x$  puede escribirse

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con  $x_i > 0$  para  $i = 1, \dots, k$ ,  $k \leq m$ .

Notemos por  $A^k$  la  $k$ -ésima columna de  $A$ . Luego  $A = [A^1, \dots, A^n]$  y

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^k x_i A^i = b$$

Probaremos que  $A^1, \dots, A^k$  son linealmente independientes. Supongamos que son linealmente dependientes, es decir, que existen  $\mu_1, \dots, \mu_k$  no todos nulos, tales que  $\sum_{i=1}^k \mu_i A^i = 0$ .

Definamos el vector

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, para  $\alpha > 0$ , construyamos los siguientes vectores

$$\begin{aligned}y &= x + \alpha\mu \\z &= x - \alpha\mu\end{aligned}$$

Es claro que  $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$  y que  $y, z \in \mathcal{P}$ , para  $\alpha$  suficientemente pequeño.

Además  $x \neq y$ ,  $y \neq z$  y  $z \neq x$ , por lo tanto  $x$  es combinación convexa de dos puntos distintos en  $\mathcal{P}$ , luego no es extremo (contradicción).

Así,  $A^1, \dots, A^k$  son linealmente independientes, lo que implica, en particular, que  $k \leq m$ . Podemos agregar  $A^{k+1}, \dots, A^m$  (eventualmente reordenando columnas) para obtener un conjunto maximal (recordar que  $A$  es de rango  $m$ ) y definir  $B = [A^1, \dots, A^m]$ , que es una matriz invertible, y  $N = [A^{m+1}, \dots, A^n]$ .

Con esto,  $A$  tiene la forma  $A = [B, N]$ . Se tiene entonces las equivalencias

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^n x_i A^i = b \iff \sum_{i=1}^m x_i A^i + \sum_{i=m+1}^n x_i A^i = b$$

Notando  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ , con

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

la ecuación anterior se escribe:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

de donde  $x_B = B^{-1}b$ . ■

**Corolario 1.1.1** *El número de puntos extremos de un poliedro en la forma canónica es finito.*

**Demostración.** Hay a lo sumo  $\binom{n}{m}$  formas de elegir las  $m$  columnas independientes de  $A$ , y cada matriz  $B$  está asociada a lo más a un punto extremo. ■

**Ejemplo 1.1.10** Consideremos un poliedro en la forma canónica dado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos sus puntos extremos. De acuerdo al corolario anterior, existen a lo sumo 6 puntos extremos dado que hay 6 formas posibles de elegir la matriz  $B$ .

(1)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  no es invertible.

(2)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

(3)  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible y el vector  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  tiene todas sus coordenadas positivas.

(4)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

(5)  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible y el vector  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  tiene todas sus coordenadas positivas.

(6)  $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

Los casos (3) y (5) nos entregan puntos extremos para el poliedro en estudio, sólo falta ubicar los valores resultantes en las posiciones correctas:

- La matriz del caso (3) toma las columnas primera y cuarta de la matriz  $A$ , luego el vector punto extremo correspondiente a este caso será  $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- La matriz del caso (5) toma las columnas segunda y cuarta de la matriz  $A$ , luego el vector punto extremo correspondiente a este caso será  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**Definición 1.1.7** Se llama **polígono** a la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos.

De acuerdo con esta definición, el conjunto  $S$  del Ejemplo (1.1.9) es un polígono y puede concluirse fácilmente que todo polígono es envoltura convexa de sus puntos extremos. Es obvio, además, que todo polígono es un poliedro. Luego, parece natural preguntarse si todo poliedro puede escribirse como combinación convexa de sus puntos extremos. La respuesta es negativa, cuando el poliedro es no acotado. En el Ejemplo (1.1.7) observamos que cualquier punto del poliedro que no esté en la superficie del triángulo definido por los puntos  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , no puede ser expresado como combinación convexa de esos tres puntos extremos.

**Ejemplo 1.1.11** Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq |x_1|\}$ . Dado que

$$x_2 \geq |x_1| \iff x_2 \geq x_1 \geq -x_2, \quad x_2 \geq 0,$$

se tiene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0\}$$

o, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

Como es posible ver en la Figura (1.8),  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es el único punto extremo y ningún punto del poliedro  $S$  puede expresarse como combinación convexa de sus puntos extremos. Luego, para poliedros no acotados introduciremos un nuevo concepto, en la subsección siguiente.

### 1.1.3. Direcciones y direcciones extremas

**Definición 1.1.8** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , un conjunto convexo. Un vector  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , se dice **dirección** de  $S$  si y sólo si  $\forall x \in S$  se tiene que  $x + \lambda d \in S$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .

Consideremos el poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ . Una dirección de  $\mathcal{P}$  debe satisfacer que  $\forall x \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} A(x + \lambda d) &= b \quad \forall \lambda \geq 0 \\ x + \lambda d &\geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

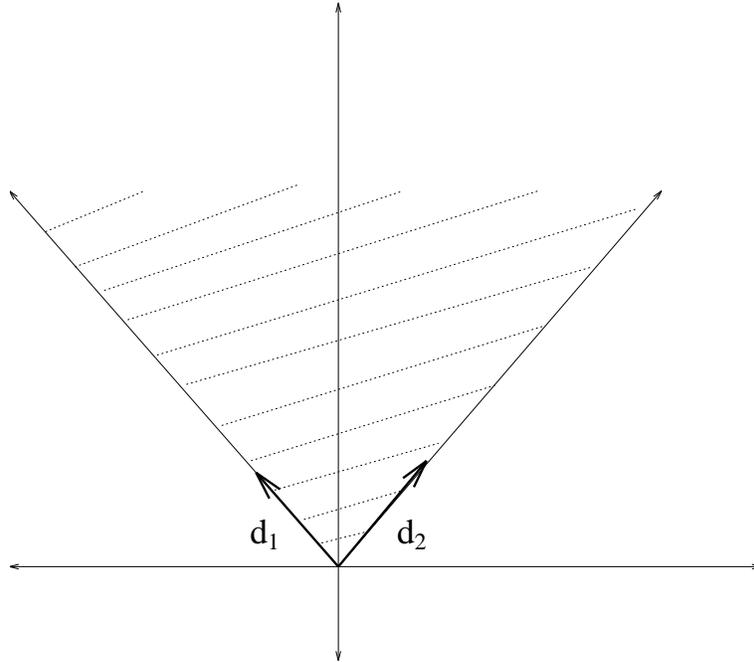


Figura 1.8: El punto  $(0,0)$  es el único punto extremo del poliedro de la figura y  $d_1, d_2$  son sus únicas direcciones extremas.

Luego,  $d$  es dirección de  $\mathcal{P}$  si y solamente si satisface el sistema  $Ad = 0, d \geq 0$ .

**Definición 1.1.9** *Dos direcciones  $d_1$  y  $d_2$  se dirán iguales si y sólo si  $d_1 = \alpha d_2$  para algún  $\alpha > 0$ . Se escribirá  $d_1 = d_2$ , si no hay posible confusión.*

**Definición 1.1.10** *Sea  $S$  un convexo cerrado y  $d \in \mathbb{R}^n$  una dirección de  $S$ . Se dice que  $d$  es dirección extrema si dadas  $d_1$  y  $d_2$ , direcciones de  $S$ , tales que  $d = \alpha d_1 + \beta d_2$  para algún  $\alpha, \beta > 0$ , entonces se tiene que  $d = d_1 = d_2$ .*

*Es decir,  $d$  no puede expresarse como combinación lineal positiva de otras dos direcciones distintas.*

**Ejemplo 1.1.12** *En la Figura (1.8),  $d_1$  y  $d_2$  son direcciones extremas y toda otra dirección se escribe como combinación lineal positiva de ellas.*

Con lo que hemos hecho hasta aquí, una pregunta interesante es: ¿existirá alguna caracterización de las direcciones extremas, equivalente a la obtenida para puntos extremos?

Escribamos la matriz  $A$  que representa el poliedro escrito en la forma canónica tal como en el caso de puntos extremos, es decir,  $A = [B, N]$  y consideremos  $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$  con  $B^{-1}a_j \leq 0$ , donde  $a_j$  es columna de  $N$ . Verifiquemos que  $d$  es dirección: en efecto,  $d \geq 0$  y  $Ad = [B, N] \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = -BB^{-1}a_j + Ne_j = -a_j + a_j = 0$ .

Supongamos que no es extrema, es decir, que existen  $d_1$  y  $d_2$  direcciones de  $\mathcal{P}$  distintas, tales que  $d$  es combinación lineal positiva de ellas:  $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ , para  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Entonces  $d_1$  y  $d_2$  tendrán la forma:

$$d_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix}$$

para algún  $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ . Como  $d_1$  y  $d_2$  son direcciones de  $\mathcal{P}$  entonces  $Ad_1 = Ad_2 = 0$ . Luego

$$[B, N] \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix} = Bd_{11} + \eta_1 Ne_j = Bd_{11} + \eta_1 a_j = 0 \Rightarrow d_{11} = -\eta_1 B^{-1}a_j$$

$$[B, N] \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix} = Bd_{21} + \eta_2 Ne_j = Bd_{21} + \eta_2 a_j = 0 \Rightarrow d_{21} = -\eta_2 B^{-1}a_j$$

por lo tanto  $d_1 = d_2 = d$  (en el sentido de la igualdad de direcciones), lo que muestra que  $d$  es dirección extrema.

Lo explicado anteriormente nos permite formular el teorema de caracterización de direcciones extremas.

**Teorema 1.1.2** *Sea un poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Una dirección  $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$  es dirección extrema de  $\mathcal{P}$  si y sólo si la matriz  $A$  se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma  $A = [B, N]$ , donde  $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  es invertible y  $\bar{d}$  es un múltiplo positivo de  $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$  con  $B^{-1}a_j \leq 0$ , donde  $a_j \in N$  (es un vector columna de  $N$ ) y  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-m}$ .*

**Corolario 1.1.2** *El número de direcciones extremas de un poliedro en la forma canónica es finito.*

**Demostración.** Hay a lo más  $\binom{n}{m}$  formas de elegir  $B^{-1}$  y como hay  $n - m$  columnas en  $N$ , entonces  $(n - m) \binom{n}{m}$  es el número máximo de direcciones extremas. ■

**Ejemplo 1.1.13** *Volvamos al Ejemplo (1.1.10). De acuerdo al corolario anterior, existen 12 posibles direcciones extremas, por lo tanto, no desarrollaremos el cálculo completo, sólo consideraremos el siguiente caso: tomemos la matriz  $B$  formada por la segunda y cuarta columnas de  $A$ , es decir  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$*

*Luego  $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  y  $B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . El producto de  $B^{-1}$  con la primera columna de  $N$  no es negativo, por lo tanto, no nos permite calcular una dirección extrema. Sin embargo, el producto con la segunda columna de  $N$  es negativo. Tal como en el caso de puntos*

*extremos, sólo basta ordenar la información para decir que  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  es dirección extrema del poliedro.*

Para concluir esta sección, enunciaremos, sin demostrar, un teorema de caracterización que liga todo lo que hemos desarrollado hasta ahora.

**Teorema 1.1.3** *Sea  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sean  $x_1, \dots, x_k$  los puntos extremos y  $d_1, \dots, d_l$  las direcciones extremas de  $\mathcal{P}$ . Entonces,  $x \in \mathcal{P}$  si y sólo si puede ser escrito como la suma de una combinación convexa de los puntos extremos y una combinación lineal positiva de las direcciones extremas, es decir,*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

*donde  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $\mu_j \geq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, l$ .*

**Teorema 1.1.4**  *$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$  tiene al menos una dirección extrema si y sólo si  $\mathcal{P}$  es no acotado.*

**Demostración.**

( $\implies$ ) Si  $\mathcal{P}$  tiene una dirección extrema  $d$ , entonces es no acotado puesto que  $\forall x \in \mathcal{P}$  se tiene que  $x + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda \geq 0$  y por lo tanto  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|x + \lambda d\| = \infty$ .

( $\impliedby$ ) Supongamos que  $\mathcal{P}$  es no acotado y que no posee direcciones extremas. Luego, por el teorema anterior, todo punto  $x \in \mathcal{P}$  puede escribirse de la forma  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ , para algunos

$$\lambda_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Por la desigualdad triangular

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^k \|x_i\| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{P}$$

lo que contradice que  $\mathcal{P}$  sea no acotado. ■

**Ejercicio 1.1.2** Sea  $S$  un convexo. Demuestre que  $x \in S$  es punto extremo si y sólo si  $S \setminus \{x\}$  es convexo.

**Ejercicio 1.1.3** Probar que si  $S$  es un conjunto finito,  $co(S)$  es un poliedro.

**1.1.4. Proyección sobre conjuntos convexos**

**Teorema 1.1.5** Sea  $S$  un conjunto convexo, cerrado, no vacío en  $\mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \notin S$ . Entonces, existe un único  $\bar{x} \in S$  que minimiza la función

$$\begin{aligned} \varphi_y : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) = \|y - x\| \end{aligned}$$

**Demostración.**

Existencia: Sea  $\gamma = \inf\{\varphi_y(x) \mid x \in S\}$ . Existe una sucesión minimizante  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S$  tal que

$$\varphi_y(x_k) \rightarrow \gamma, \quad k \rightarrow \infty.$$

Usando la propiedad conocida como Ley del Paralelogramo,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

para  $u = x_k - y$ ,  $v = x_l - y$ , tenemos

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\|^2 &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - \|x_k + x_l - 2y\|^2 \\ &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2\end{aligned}$$

Notar que, por convexidad de  $S$ , se tiene que  $\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l \in S$ , luego  $\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2 \geq \gamma^2$ , por lo tanto,

$$\|x_k - x_l\|^2 \leq 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\gamma^2$$

Si  $k, l \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\|x_k - y\| \rightarrow \gamma$  y  $\|x_l - y\| \rightarrow \gamma$ , luego  $\|x_k - x_l\|^2 \rightarrow 0$ , es decir,  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$  y, por lo tanto, converge a un cierto  $\bar{x} \in S$  (cerrado). Por continuidad de la norma,  $\varphi_y(\bar{x}) = \gamma$ .

Unicidad: Sea  $\bar{\bar{x}} \in S$ ,  $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$ , tal que  $\varphi_y(\bar{\bar{x}}) = \gamma$ . De manera análoga a la parte anterior, se llega a  $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 \leq 2\|\bar{x} - y\|^2 + 2\|\bar{\bar{x}} - y\|^2 - 4\gamma^2$ , que es igual a cero, luego  $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ . ■

**Definición 1.1.11** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío.

- i) Para  $y \in \mathbb{R}^n$ , se define la **distancia de  $y$  a  $S$** , por  $d(y, S) = \min\{\varphi_y(x) / x \in S\}$ .
- ii) Para  $y \in \mathbb{R}^n$ , se define la **proyección de  $y$  sobre  $S$** , mediante

$$P_S(y) = \arg \min\{\varphi_y(x) / x \in S\} = \bar{x} \in S,$$

siendo  $\bar{x}$  el único que satisface  $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x), \forall x \in S$ .

**Observación 1.1.4** La notación  $\arg \min$  se lee como "el argumento que minimiza". Claramente, si  $y \in S$  se tiene  $P_S(y) = y$ ,  $d(y, S) = 0$ .

**Teorema 1.1.6** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío,  $y \notin S$ . Se tiene que

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$$

si y solamente si  $\bar{x}$  minimiza  $\varphi_y(x)$ .

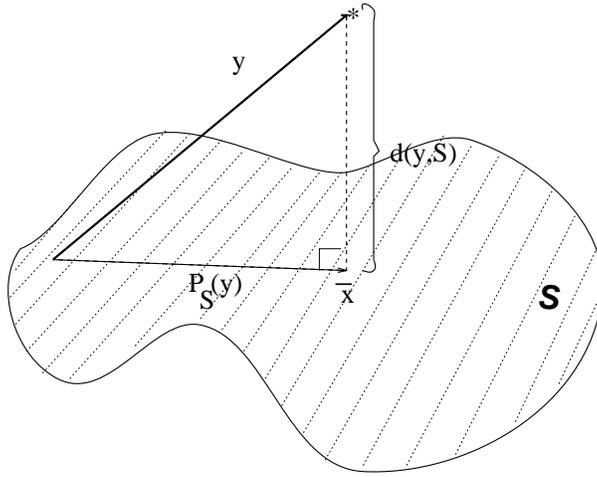


Figura 1.9: Distancia y proyección del punto  $y$  al conjunto  $S$

### Demostración.

Supongamos que para cierto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$ . Calculemos:

$$\begin{aligned}
 \|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\
 &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\
 &\geq \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 \\
 &\geq \|y - \bar{x}\|^2
 \end{aligned}$$

Lo que implica que  $\|y - \bar{x}\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in S$ . Es decir  $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x), \quad \forall x \in S$ .

Inversamente tenemos que, si  $\bar{x}$  minimiza  $\varphi_y$  en  $S$ , entonces  $\forall x \in S$ :

$$\begin{aligned}
 \|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\
 &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\
 &\leq \|y - x\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle
 \end{aligned}$$

Entonces  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|^2, \quad \forall x \in S$ .

Como  $S$  es un conjunto convexo y  $\bar{x} \in S$ , entonces  $\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in S, \forall \lambda \in ]0, 1[$  y por lo tanto:

$$\langle y - \bar{x}, \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x}\|^2$$

de donde

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|x - \bar{x}\|^2$$

Tomando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , se tiene el resultado. ■

Geoméricamente, el teorema anterior quiere decir que la proyección de  $y$  sobre  $S$  se alcanza en un punto  $\bar{x}$  tal que el trazo  $y - \bar{x}$  es ortogonal al conjunto.

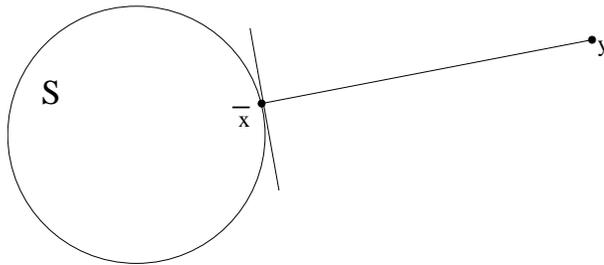


Figura 1.10: Proyección de  $y$  sobre  $S$ .

**Teorema 1.1.7** *Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío, entonces  $\|P_S(x) - P_S(y)\| \leq \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .*

**Observación 1.1.5** *Esto es equivalente a decir que si  $S$  un convexo cerrado no vacío, la función de proyección  $P_S(x)$  es Lipschitz (continua).*

**Ejercicio 1.1.4** *Demuestre el Teorema (1.1.7).*

### 1.1.5. Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan

**Teorema 1.1.8 (Hahn-Banach)** *Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío,  $y \notin S$ . Existe  $p \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} p^T y &> \alpha \\ p^T x &\leq \alpha, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

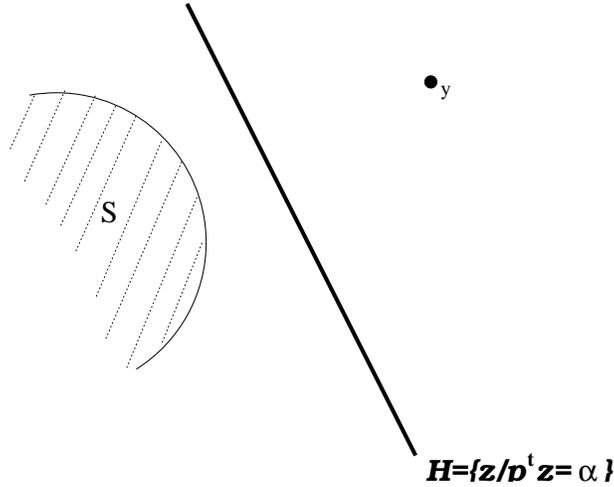


Figura 1.11:  $H$  es el hiperplano separador entre  $S$  e  $y$ .

**Demostración.** De acuerdo a lo desarrollado en la subsección anterior, existe un único  $\bar{x} \in S$  tal que  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S$ .

Sean  $p = y - \bar{x} \neq 0$  y  $\alpha = \langle p, \bar{x} \rangle$ . Tenemos que

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S$$

por lo tanto

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, \bar{x} \rangle, \forall x \in S (*)$$

Por otro lado

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y + y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \langle p, y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \|p\|^2 \leq 0, \forall x \in S$$

lo que implica que

$$\langle p, x \rangle + \|p\|^2 \leq \langle p, y \rangle, \forall x \in S.$$

Como  $\|p\|^2 \neq 0$ , se tiene que

$$\langle p, x \rangle < \langle p, y \rangle, \forall x \in S (**)$$

Por (\*),  $\langle p, x \rangle \leq \alpha \quad \forall x \in S$  y por (\*\*),  $\alpha < \langle p, y \rangle$  lo que concluye la demostración. ■

Este teorema induce lo que se conoce como **hiperplano separador** (ver Figura 1.11),

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / p^T x = \alpha\}.$$

**Definición 1.1.12** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío. Un **hiperplano soportante** de  $S$  es un hiperplano  $H$  tal que  $H \cap S \neq \emptyset$  y  $\{S \subseteq H^+ \vee S \subseteq H^-\}$  (ver Figura 1.12).

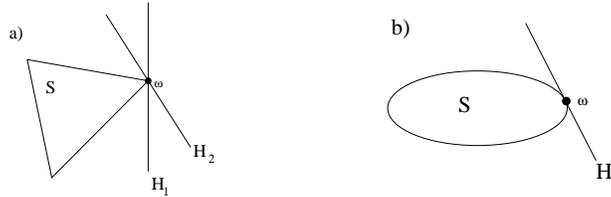


Figura 1.12: Para la figura a),  $H_1$  y  $H_2$  son hiperplanos soportantes en el punto señalado.

Cuando definimos los poliedros, los caracterizamos como una intersección finita de semiespacios. El siguiente teorema nos permitirá deducir una caracterización similar para un conjunto convexo no vacío cualquiera.

**Teorema 1.1.9** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y sea  $\bar{x}$  un punto en la frontera de  $S$ . Entonces  $S$  tiene un hiperplano soportante en  $\bar{x}$ .

**Corolario 1.1.3** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío. Entonces

$$S = \bigcap \{W \text{ semiespacio} / S \subseteq W\}$$

**Observación 1.1.6** Note que la intersección anterior no es necesariamente finita.

**Demostración.** Basta tomar los semiespacios generados por todos los hiperplanos soportantes del convexo, que contengan a  $S$ . ■

**Teorema 1.1.10 (Farkas)** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1)  $Ax \leq 0, c^T x > 0$
- (2)  $A^T y = c, y \geq 0$

**Demostración.** Supongamos que (2) tiene solución, es decir, que existe  $y \geq 0$  tal que  $A^T y = c$ .

Si (1) tuviese solución, existiría  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax \leq 0$ ,  $c^T x > 0$ . Premultiplicando la primera desigualdad por  $y \geq 0$ , se tiene que  $y^T Ax = (A^T y)^T x = c^T x \leq 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto (1) no tiene solución.

Supongamos ahora que (2) no tiene solución. Sea  $S = \{\omega \in \mathbb{R}^n / \omega = A^T y, y \geq 0\}$ , que es un convexo, cerrado y no vacío.

Como (2) no tiene solución, entonces  $c \notin S$ . Luego existen  $p \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle p, c \rangle > \alpha \quad \text{y} \quad \langle p, \omega \rangle \leq \alpha, \quad \forall \omega \in S.$$

Como  $\omega = 0 \in S$ ,  $\alpha \geq 0$ , lo que implica

$$\langle p, c \rangle > 0 \quad (*)$$

De  $\langle p, \omega \rangle \leq \alpha \quad \forall \omega \in S$ , se tiene que  $\langle p, A^T y \rangle = \langle Ap, y \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \geq 0$ .

Supongamos que  $Ap$  tiene una coordenada estrictamente positiva, digamos  $(Ap)_1$ , y con-

sideremos  $y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda > 0$ . Entonces  $\lambda(Ap)_1 \leq \alpha \quad \forall \lambda > 0$ , lo que es una contradicción,

pues se puede elegir  $\lambda$  suficientemente grande de modo de violar la desigualdad, dado que  $(Ap)_1 > 0$ .

Luego,  $Ap$  no tiene coordenadas positivas, es decir,  $Ap \leq 0$  (\*\*).

Por (\*) y (\*\*), (1) tiene solución para  $x = p$ . ■

**Ejercicio 1.1.5** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

$$(1) \quad Ax \leq 0, \quad x \geq 0, \quad c^T x > 0$$

$$(2) \quad A^T u \geq c, \quad u \geq 0$$

Basta considerar la matriz  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$  y aplicar Farkas. ■

**Teorema 1.1.11** Sean  $S_1$  y  $S_2$ , conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ , tales que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Existe un hiperplano que separa  $S_1$  y  $S_2$ , es decir, existe  $p \in \mathbb{R}^n$  no nulo tal que

$$p^T x_1 \geq p^T x_2 \quad \forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2.$$

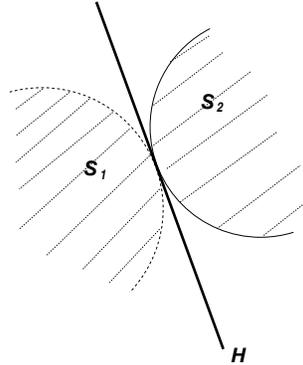


Figura 1.13: En el caso de la figura, el hiperplano separador de los dos conjuntos convexos es soportante para la clausura de ambos.

**Demostración.** Consideremos el conjunto

$$S = \{x/x = x_2 - x_1, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} = S_2 - S_1.$$

Se deduce del Ejercicio (1.1.1) que  $S$  es un convexo. Además, es claro que  $0 \notin S$  (en efecto,  $0 \in S$  implicaría que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ). Luego, usando el Teorema (1.1.8), existe  $p \neq 0$  tal que

$$p^T x \leq 0 \quad \forall x \in S$$

de donde se concluye que

$$p^T(x_2 - x_1) \leq 0 \quad \forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2$$

lo que prueba el teorema. ■

**Teorema 1.1.12 (Gordan)** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Entonces uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1)  $Ax < 0$
- (2)  $A^T p = 0, p \geq 0, p \neq 0$

**Demostración.** Supongamos primero que (1) tiene solución, es decir, que existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax < 0$ . Demostraremos que (2) no tiene solución. Si no, existiría  $p \in \mathbb{R}^n, p \geq 0, p \neq 0$  tal que  $A^T p = 0$ .

Entonces, premultiplicando (1) por  $p^T$  se obtiene que  $p^T Ax < 0$ , lo que contradice que  $A^T p = 0$ .

Supongamos ahora que (1) no tiene solución. Demostraremos que (2) posee solución. Si no, definamos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}^m / z = Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \quad y \quad S_2 = \{z \in \mathbb{R}^m / z < 0\}$$

Como (1) no tiene solución, entonces tenemos

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= \emptyset \\ S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset \\ S_1 \quad y \quad S_2 \quad &convexos \end{aligned}$$

Entonces, por teorema anterior (separación de dos convexos), existe un hiperplano separador, es decir

$$\exists p \neq 0 \text{ tal que } p^T z_1 \geq p^T z_2 \quad \forall z_1 \in S_1 \quad z_2 \in S_2$$

Luego,

$$p^T Ax_1 \geq p^T z_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n \quad z_2 \in S_2 \quad (*),$$

lo cual implica que

$$p^T Ax_1 \geq \sup_{z_2 < 0} \{p^T z_2\}.$$

Probaremos que  $p \geq 0$ . Si  $p$  tiene alguna coordenada negativa, entonces el supremo del lado derecho de esta desigualdad es igual a  $+\infty$ . Se deduce entonces que  $p^T Ax_1 = +\infty, \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ , lo que es una contradicción. Así,  $p \geq 0$ .

Luego, tomando límite cuando  $z_2 \rightarrow 0^-$  en (\*), se tiene que  $p^T Ax_1 \geq 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Elijiendo  $x_1 = -A^T p$ , se tiene que  $\|A^T p\| = 0$  lo que implica  $A^T p = 0$ . Esto demuestra que (2) tiene solución. ■

## 1.2. Funciones convexas

**Definición 1.2.1** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Se dice que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función convexa** si y sólo si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Esta definición se puede interpretar geoméricamente, diciendo que la imagen por  $f$  del segmento  $[x, y]$  queda por debajo de la recta que une  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  (ver Figura 1.14).

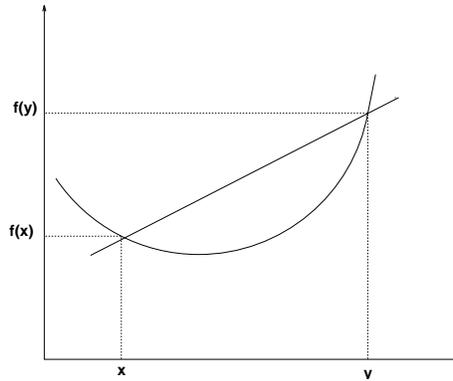


Figura 1.14: Función convexa: imagen del segmento  $[x, y]$  queda por debajo de la recta que une los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ .

Es posible probar la siguiente definición equivalente de convexidad de funciones.

**Definición 1.2.2** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Se dice que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función convexa** si y sólo si  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in S$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , se tiene

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k).$$

**Definición 1.2.3** Una función  $f$ , definida como antes, se dice **estrictamente convexa** si y sólo si para todo  $x \neq y$ ,  $0 < \lambda < 1$ , se tiene

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

**Definición 1.2.4** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es **cóncava** si y sólo si  $-f$  es convexa o, equivalentemente, si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

Del mismo modo,  $f$  es **estrictamente cóncava** si y sólo si  $-f$  es estrictamente convexa.

**Ejemplo 1.2.1 .**

i) Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \alpha^T x + \beta$  (lineal afín) es cóncava y convexa.

ii) La función  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ] - \infty, 0] \\ 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ x & \text{si } x \in [1, \infty[ \end{cases}$$

(lineal por pedazos) no es convexa ni cóncava.

iii) La función  $f(x) = -x^2$  es estrictamente cóncava.

iv) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in ] - \infty, 2] \\ 4 & \text{si } x \in ]2, \infty[ \end{cases}$$

no es cóncava ni convexa.

A continuación enunciamos y demostramos (a modo de ejercicio, pues este es un tema del Cálculo en Varias Variables) el teorema que garantiza la continuidad de las funciones convexas en el interior de su dominio.

**Teorema 1.2.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Entonces,  $f$  es continua en el interior de  $S$ .

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ . Para probar la continuidad de  $f$  en  $\bar{x}$  necesitamos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$ .

Sea entonces  $\varepsilon > 0$ . Dado que  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  existe  $\eta > 0$  tal que la bola de centro  $\bar{x}$  y radio  $\eta$  está incluida en  $S$ , es decir,  $B(\bar{x}, \eta) \subseteq S$ .

Claramente  $\bar{x} \pm \eta e_i \in S$ , con  $e_i$  vector de la base canónica. Luego, es claro que

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \eta e_i)$$

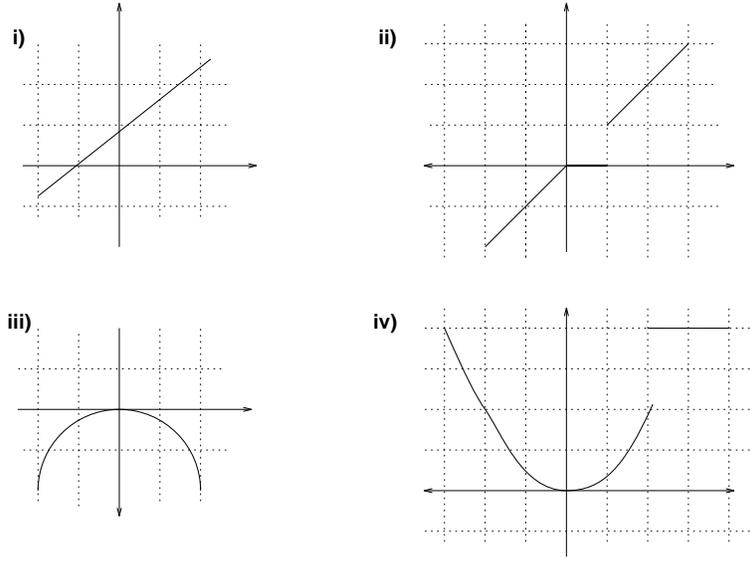


Figura 1.15: Gráfico de las funciones del ejemplo 1.2.1

y esto implica (por convexidad de  $f$ )

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}f(\bar{x} - \eta e_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

de donde

$$0 \leq \frac{1}{2}\{f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})\} + \frac{1}{2}\{f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})\}.$$

De aquí se desprende que  $\forall i$ ,  $f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})$  y  $f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})$  no pueden ser simultáneamente negativos.

Sea  $K = \max\{f(\bar{x} \pm \eta e_i) - f(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $0 \leq K < \infty$ , y definamos  $\delta = \min\{\frac{\eta}{n}, \frac{\varepsilon \eta}{nK}\}$ .

Sean  $\alpha_i \geq 0$   $i = 1, \dots, n$ , tales que  $x - \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$ , con

$$d_i = \begin{cases} \eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i \geq 0 \\ -\eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i < 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } \|x - \bar{x}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j d_i d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|d_i\|^2 = \eta^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \delta^2.$$

Así,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \frac{\delta^2}{\eta^2} = \min\left\{\frac{1}{n^2}, \frac{\varepsilon^2}{n^2 K^2}\right\}$ , lo que implica en particular que  $\alpha_i \leq \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{\varepsilon}{nK}\right\} \quad \forall i \quad (*)$ .  
Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - \bar{x} + \bar{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \bar{x}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(n\alpha_i d_i + \bar{x})\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(n\alpha_i d_i + \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[(1 - n\alpha_i)\bar{x} + n\alpha_i(\bar{x} + d_i)] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - n\alpha_i)f(\bar{x}) + n\alpha_i f(\bar{x} + d_i)] \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})] \end{aligned}$$

Luego (de la definición de  $K$  y por  $(*)$ ),

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})] \leq K \sum_{i=1}^n \alpha_i < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

Para terminar, falta probar que  $f(\bar{x}) - f(x) \leq \varepsilon$ .

Sea  $y = 2\bar{x} - x$ . Notemos que  $\|y - \bar{x}\| = \|\bar{x} - x\| \leq \delta$ , luego,  $f(y) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$ .

Pero  $f(\bar{x}) = f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\right) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[f(\bar{x}) - f(x)] \leq \frac{1}{2}[f(y) - f(\bar{x})] \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Luego,  $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$  y se tiene el resultado. ■

Una función convexa podría no ser continua en todo su dominio, sin embargo, el teorema anterior dice que los puntos de discontinuidad se encuentran en la frontera, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.2.2** Sea  $S = \{x/|x| \leq 1\}$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| = 1 \end{cases}$

La función  $f$  es convexa, continua en  $\text{int}(S)$  y los puntos de discontinuidad  $\{-1, 1\}$  están en la frontera de  $S$ .

### 1.2.1. Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas

**Definición 1.2.5** Sea  $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S \neq \emptyset$  un conjunto cualquiera. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  se definen los siguientes conjuntos (ver Figura 1.16)

- $N_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$ , el conjunto de nivel  $\alpha$ .
- $C_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = \alpha\}$ , curva de nivel  $\alpha$ .
- $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} / f(x) \leq \alpha\}$ , el epígrafo de  $f$ .

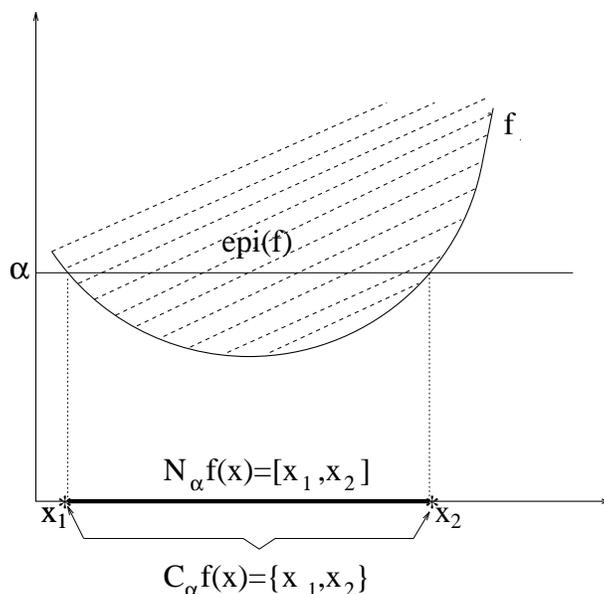


Figura 1.16: Conjunto de nivel, curva de nivel y epígrafo de una función real  $f$ .

**Teorema 1.2.2** Sea una función  $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  convexo. Se tiene que

- (i)  $f$  es convexa si y sólo si  $\text{epi}(f)$  es un conjunto convexo
- (ii) Si  $f$  es convexa, entonces  $N_\alpha(f)$  es convexo.

**Demostración.**

(i) Sea  $f$  convexa. Sean  $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces, por convexidad

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \in S \times \mathbb{R}$$

Como  $f$  es convexa,  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$ , puesto que  $f(x) \leq \alpha, f(y) \leq \beta$ . Entonces,

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) \in \text{epi}(f),$$

por lo tanto  $\text{epi}(f)$  es convexo.

Sea ahora  $\text{epi}(f)$  convexo. Entonces,  $\forall (x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , se tiene que

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) \in \text{epi}(f),$$

es decir,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

Claramente,  $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f)$ . Reemplazando  $\alpha$  por  $f(x)$  y  $\beta$  por  $f(y)$  en la expresión anterior, se concluye que  $f$  es convexa.

(ii) Sean  $x, y \in N_\alpha(f)$ . Se tiene que  $f(x) \leq \alpha$  y  $f(y) \leq \alpha$ , por lo tanto

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \alpha$$

de donde  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in N_\alpha(f)$ . ■

Veamos que la implicancia inversa en (ii) no es cierta. Para la función (iv) del Ejemplo (1.2.1),  $N_\alpha(f)$  es convexo  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , sin embargo la función no es convexa.

## 1.2.2. Funciones convexas diferenciables

**Definición 1.2.6** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in S$ , y  $d \neq 0$  tal que

$$\bar{x} + \lambda d \in S \quad \forall \lambda \in [0, \eta], \text{ algún } \eta > 0.$$

Se define la **derivada direccional** de  $f$  en el punto  $\bar{x}$ , en la dirección  $d$ , por (cuando el límite existe)

$$f'(\bar{x}, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \in \mathbb{R}$$

donde  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  y las operaciones se extienden como sigue:

$$a + \infty = \infty = \infty + a \text{ para } -\infty < a \leq \infty$$

$$a - \infty = -\infty = -\infty + a \text{ para } -\infty \leq a < \infty$$

$$a \cdot \infty = \infty = \infty \cdot a, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty = (-\infty) \cdot a \text{ para } 0 < a \leq \infty$$

$$a \cdot \infty = -\infty = \infty \cdot a, \quad a \cdot (-\infty) = \infty = (-\infty) \cdot a \text{ para } -\infty < a \leq 0$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0$$

$$-(-\infty) = \infty$$

y la suma de  $\infty$  con  $-\infty$  no está definida.

**Definición 1.2.7** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **diferenciable** en  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  si y sólo si existe  $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde  $o(x - \bar{x})$  es tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ .

**Teorema 1.2.3** Si  $f$  es diferenciable en el interior de  $S$ , entonces  $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$ .

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , como  $f$  es diferenciable se tiene que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S.$$

Sea  $x = \bar{x} + \lambda d \in S$  (para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño), luego

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (\lambda d) + o(\lambda d)$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} = \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(\lambda d)}{\|\lambda d\|} \|d\|$$

Tomando límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , se obtiene  $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$ . ■

**Proposición 1.2.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa. Sean  $\bar{x} \in S$ , y  $d \neq 0$  tal que existe  $\eta > 0$  que cumple  $\bar{x} + \lambda d \in S$ , para todo  $\lambda \in [0, \eta[$ . Entonces  $f'(\bar{x}, d)$  existe.

**Demostración.** Sean  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \eta$ . Entonces

$$f(\bar{x} + \lambda_1 d) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\bar{x}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2}f(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)f(\bar{x})$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_1 d) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda_2 d) - f(\bar{x})}{\lambda_2}$$

Así,  $\varphi(\lambda) = \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$  es una función no decreciente de  $\lambda$  y por lo tanto se tiene que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi(\lambda)$  existe y es igual a  $\inf_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$ . Entonces  $f'(\bar{x}, d)$  existe. ■

**Teorema 1.2.4** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , convexo. Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$ ,  $\forall x, \bar{x} \in S$ .

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Sea  $f$  convexa. Dados  $x, \bar{x} \in S$  se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Reordenando, tenemos que

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda} \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1[$$

y tomando límite  $\lambda \rightarrow 0^+$  :

$$f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x})$$

que implica

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall \bar{x}, x \in S.$$

( $\Leftarrow$ ) Sean  $x, \bar{x} \in S$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), (1 - \lambda)(x - \bar{x}) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\ f(\bar{x}) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), \lambda(\bar{x} - x) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por  $\lambda$ , la segunda por  $(1 - \lambda)$  y sumando, se tiene

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Es decir,  $f$  es convexa. ■

**Observación 1.2.1** Es directo probar que  $f$ , satisfaciendo las hipótesis del teorema anterior, es estrictamente convexa si y sólo si  $f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$ ,  $\forall x, \bar{x} \in S$ ,  $x \neq \bar{x}$ .

**Corolario 1.2.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , convexo. Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$ ,  $\forall x_1, x_2 \in S$ .

**Demostración.** De acuerdo al teorema anterior,

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_2) + \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \\ f(x_2) &\geq f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores, se tiene que

$$0 \geq \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle = \langle -\nabla f(x_2) + \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle$$

es decir,  $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in S$ . ■

**Definición 1.2.8** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **dos veces diferenciable** en  $\bar{x}$  si y sólo si existe  $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$  y  $H(\bar{x}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde  $\frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow \bar{x}$

La matriz  $H(\bar{x})$  se llama **matriz Hessiana** de  $f$  en  $\bar{x}$ :

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

**Teorema 1.2.5** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, convexo, no vacío, y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable en  $S$ . Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $H(x)$  es semi-definida positiva  $\forall x \in S$ .

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\bar{x} \in S$ . Queremos probar que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^T H(\bar{x}) x \geq 0$ .

Como  $S$  es abierto,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} + \lambda x \in S$ , para  $\lambda$  suficientemente pequeño. Del Teorema (1.2.4) se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda x) \geq f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Además,

$$f(\bar{x} + \lambda x) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x + \frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x + o(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Restando las dos ecuaciones, se tiene que

$$0 \geq -\frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x - o(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$x^T H(\bar{x}) x + \frac{2}{\lambda^2} o(\lambda x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para  $x \neq 0$  (el caso  $x = 0$  es directo), dividamos por  $\|x\|^2$  y tomemos límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$  para obtener que  $x^T H(\bar{x}) x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , es decir, que  $H(\bar{x})$  es semi-definida positiva.

( $\Leftarrow$ ) Sean  $x, \bar{x} \in S$ . Por teorema del valor medio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x})$$

con  $\hat{x} = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x \in S$ , para algún  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Como  $H(\hat{x})$  es semi-definida positiva,  $(x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x}) \geq 0$ , luego

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S$$

Por el Teorema (1.2.4),  $f$  es convexa.

**Ejemplo 1.2.3** Sea  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$ . Deseamos verificar si  $f$  es convexa, cóncava o ninguna de ellas.

Podemos escribir  $f$  de una manera más conveniente como sigue:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (10, -10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (10, -10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1, x_2) \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,  $H(x) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$  (no depende explícitamente de  $x$ ).

Calculemos sus valores propios:

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & -10 - \lambda \end{bmatrix} = (2 + \lambda)(10 + \lambda) - 4 = \lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0$$

de donde  $\lambda_1 = -1,5279$  y  $\lambda_2 = -10,4721$ .

Como ambos valores son negativos,  $H(x)$  es definida negativa. Luego, por el teorema anterior,  $f$  es cóncava. Más aún, como lo demuestra el siguiente resultado,  $f$  es estrictamente cóncava.

**Corolario 1.2.2** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, convexo, no vacío, y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable en  $S$ . Se tiene que,

- (i) si  $H(x)$  es definida positiva en cada punto de  $S$ , entonces  $f$  es estrictamente convexa.
- (ii) si  $f$  es estrictamente convexa, entonces  $H(x)$  es semi-definida positiva en todo punto de  $S$ .

**Demostración.**

(i) Directo de la segunda implicancia del teorema anterior. Basta ver  $H(x)$  definida positiva implica que  $f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S, x \neq \bar{x}$ , lo que por la Observación (1.2.1) es equivalente a decir que  $f$  es estrictamente convexa.

(ii) Notar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{x^T}{\|x\|} H(\bar{x}) \frac{x}{\|x\|} + 2 \frac{o(\lambda x)}{\lambda^2 \|x\|^2} \right) > 0$$

implica  $x^T H(\bar{x})x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , es decir,  $H(\bar{x})$  es semi-definida positiva. ■

### Ejemplo 1.2.4 .

(i) Consideremos la función  $f(x) = -\ln(x)$  .

La matriz hessiana,  $H(x) = f^{(2)}(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$ , es definida positiva y por el corolario anterior,  $f$  es estrictamente convexa.

(ii) La función  $f(x) = x^4$  es estrictamente convexa en todo  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo,

$$H(x) = f^{(2)}(x) = 12x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es semi-definida positiva (notar que  $H(0) = 0$ ).

### 1.2.3. Funciones no diferenciables: concepto de subgradiente

Hasta aquí hemos desarrollado caracterizaciones de convexidad que nos serán de mucha utilidad, pero sólo para funciones diferenciables. Existe una forma sencilla de extender estas caracterizaciones a funciones no diferenciables, mediante el concepto de *subgradiente*, que se define a continuación.

**Definición 1.2.9** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa. Un vector  $\xi \in \mathbb{R}^n$  se llama **subgradiente** de  $f$  en  $\bar{x}$  si y sólo si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

El conjunto de subgradientes de  $f$  en  $\bar{x}$  se denota por  $\partial f(\bar{x})$  y se llama **subdiferencial** de  $f$  en  $\bar{x}$ .

**Proposición 1.2.2** El subdiferencial es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $\xi_1, \xi_2$  dos subgradientes de  $f$  en  $\bar{x}$ , y sea  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces,  $\forall x \in S$ ,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi_1^T (x - \bar{x})$$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi_2^T (x - \bar{x})$$

Multiplicando las dos expresiones por  $\lambda$  y por  $1 - \lambda$ , respectivamente, y sumando, se tiene

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + [\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2]^T (x - \bar{x}), \quad \forall x \in S$$

lo que prueba que  $\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2 \in \partial f(\bar{x})$ .

**Proposición 1.2.3** Si  $f$  es convexa y diferenciable en  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , entonces

$$\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$$

**Demostración.** Notemos primero que  $\nabla f(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x})$ , pues  $f$  es convexa (Teorema 1.2.4).

Sea  $\xi \in \partial f(\bar{x})$ . Por definición  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$ .

Sea  $x = \bar{x} + \lambda d \in S$  (para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño). Se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda d) \geq f(\bar{x}) + \lambda \xi^T d,$$

de donde

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \geq \xi^T d$$

Tomando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , tenemos  $\nabla f(\bar{x})^T d \geq \xi^T d$  y por lo tanto  $(\xi - \nabla f(\bar{x}))^T d \leq 0$ .

Escogiendo  $d = \xi - \nabla f(\bar{x})$ , obtenemos  $\|\xi - \nabla f(\bar{x})\|^2 \leq 0$ , lo que implica que  $\xi = \nabla f(\bar{x})$ . ■

**Proposición 1.2.4** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un convexo no vacío y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Si para todo  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  se tiene que  $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ , entonces  $f$  es convexa en  $\text{int}(S)$ .

**Demostración.** Como  $S$  es un convexo, entonces  $\text{int}(S)$  también lo es. Sean  $x_1, x_2 \in \text{int}(S)$ , para  $\lambda \in [0, 1]$ .

Entonces, si  $\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S)$  se tiene que  $\partial f(\bar{x})$  es no vacío, luego existe  $\xi$  tal que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S.$$

En particular,

$$f(x_1) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x_1 - \bar{x})$$

$$f(x_2) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x_2 - \bar{x})$$

Pero  $x_1 - \bar{x} = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$  y  $x_2 - \bar{x} = -\lambda(x_1 - x_2)$ . Luego, multiplicando la primera desigualdad por  $\lambda$ , la segunda por  $(1 - \lambda)$  y sumando, se tiene que

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

es decir,  $f$  es convexa en  $\text{int}(S)$ . ■

# Capítulo 2

## Caracterización de optimalidad

### 2.1. Definición del problema de Optimización

En este capítulo trataremos el problema:

$$(P) \min_{x \in S} f(x)$$

Con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , generalmente definido por ecuaciones no necesariamente lineales, que llamaremos *región factible* y  $f$  una función cualquiera. Ciertamente, si  $S$  es un poliedro y  $f$  es lineal entonces se trata del caso de la Programación Lineal.

**Definición 2.1.1** *Un punto  $x^* \in S$  se dirá **mínimo local** de  $f$  si existe  $\epsilon > 0$  que cumpla  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in S$  tal que  $\|x^* - x\| < \epsilon$ . Es decir, existe una vecindad de  $x^*$  donde dicho punto es mínimo.*

**Definición 2.1.2** *Un punto  $x^* \in S$  se dirá **mínimo global** de  $f$  en  $S$  si  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in S$ . Es decir,  $x^*$  es solución de (P).*

En términos del lenguaje utilizado, un elemento  $\bar{x} \in S$  se llama **solución factible** de (P) y si  $\bar{x}$  resuelve (P) se puede decir que es **solución, solución óptima, mínimo, o solución global** del problema.

**Teorema 2.1.1** *Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  convexo no vacío, y sea  $\bar{x}$  una solución local del problema (P). Entonces,*

(i) Si  $f$  es convexa,  $\bar{x}$  es mínimo global.

(ii) Si  $f$  es estrictamente convexa,  $\bar{x}$  es el único mínimo global.

### Demostración.

(i) Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in V_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in S / \|\bar{x} - x\| < \varepsilon\}$ . Supongamos que  $\bar{x}$  no es óptimo global, es decir,  $\exists y \in S$  tal que  $f(y) < f(\bar{x})$ . Luego, para  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Pero para  $\bar{\lambda}$  suficientemente pequeño,  $\bar{\lambda}y + (1 - \bar{\lambda})\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{x})$ , lo cual es una contradicción pues  $\bar{x}$  es mínimo local.

(ii) Como  $f$  estrictamente convexa entonces  $f$  es convexa. Luego, por (i),  $\bar{x}$  es mínimo global.

Supongamos que no es único, esto es, que existe  $y \in S$ , con  $y \neq \bar{x}$ , tal que  $f(y) = f(\bar{x})$ . Entonces

$$f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x}\right) < \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

lo que implica que existe  $z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x} \neq \bar{x}$  tal que  $f(z) < f(\bar{x})$ , lo que contradice el hecho que  $\bar{x}$  es mínimo global. ■

## 2.2. Condiciones de optimalidad

### 2.2.1. Optimización sin restricciones

En esta parte, obtendremos condiciones necesarias y suficientes para resolver problemas no lineales irrestrictos (caso en que  $S = \mathbb{R}^n$ ), es decir problemas del tipo:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

En general supondremos que  $f$  es una función dos veces continuamente diferenciable.

**Teorema 2.2.1 (Condiciones necesarias de optimalidad)** *Sea  $x^*$  solución local de (P) y supongamos  $f \in \mathcal{C}^2(S)$ , donde  $S$  es un conjunto abierto que contiene a  $x^*$ . Entonces,*

- $\nabla f(x^*) = 0$  y
- $\nabla^2 f(x^*) = H(x^*)$  (matriz Hessiana) es semidefinida positiva.

**Demostración.**

a) Sea  $d \in \mathbb{R}^n$  fijo y consideremos la función  $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$ . Como  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  se tiene que:

$$f(x^*) \leq f(x^* + \alpha d) \quad \forall \alpha > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Es decir,

$$0 \leq \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha}.$$

Tomando límite,

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha} = g'(0)$$

Ahora, por la regla de la cadena se tiene  $g'(0) = \nabla f(x^*)^T d$ , por lo tanto

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d$$

De la arbitrariedad de  $d$ , tomando  $-d$  se deduce que  $\nabla f(x^*)^T d = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$ . En particular tomando  $d = \nabla f(x^*)$  se obtiene que  $\nabla f(x^*) = 0$ .

b) Consideremos el desarrollo de Taylor de segundo orden,

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + \frac{1}{2}g''(0)\alpha^2 + o(\alpha^2)$$

Recordemos que  $o(t)$  cumple  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ . Reescribiendo el desarrollo,

$$f(x^* + \alpha d) - f(x^*) = \alpha \nabla f(x^*)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\alpha^2)$$

por lo tanto, como  $\nabla f(x^*) = 0$  y  $f(x^* + \alpha d) - f(x^*) \geq 0$  se tiene que

$$0 \leq d^T \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}$$

Tomando  $\alpha \rightarrow 0$  se obtiene que  $\nabla^2 f(x^*)$  es semidefinida positiva. ■

En relación a las condiciones suficientes, se puede fácilmente probar los siguientes teoremas, para el caso de funciones convexas, una y dos veces diferenciables.

**Teorema 2.2.2** *Sea  $f$  una función convexa y diferenciable sobre un conjunto convexo  $S$ . Si el conjunto  $S$  es abierto,  $\nabla f(x^*) = 0$  entonces es una condición necesaria y suficiente para que  $x^* \in S$  sea un mínimo global de  $f$  sobre  $S$ .*

**Teorema 2.2.3 (Condición suficiente de optimalidad, caso general)** *Sea  $f \in C^2(S)$ , con  $S$  abierto. Supongamos que  $x^* \in S$  satisface:*

- $\nabla f(x^*) = 0$ .
- La matriz  $\nabla^2 f(x^*)$  es definida positiva.

*Entonces,  $x^*$  es un mínimo local estricto de  $f$  en  $S$ .*

## 2.2.2. Optimización con restricciones

Para el caso con restricciones, las condiciones de optimalidad son algo más complicadas que para el caso irrestricto. Comencemos con algunas definiciones previas.

**Definición 2.2.1** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $d \in \mathbb{R}^n$  es **dirección de descenso** de  $f$  en  $\bar{x}$  si y solamente si  $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ .*

*Denotaremos por  $\mathcal{D}(\bar{x}) = \{d / \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$  al conjunto de direcciones de descenso.*

**Definición 2.2.2** *Sea  $S$  un conjunto no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y  $\bar{x} \in S$ . Se llama **cono de direcciones admisibles** de  $S$  en  $\bar{x}$  al conjunto:*

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{d / d \neq 0, \bar{x} + \lambda d \in S \quad \forall \lambda \in [0, \eta[ \text{ para algún } \eta > 0\}$$

**Observación 2.2.1** *Por simplicidad notacional, escribiremos  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\bar{x})$  y  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\bar{x})$ , cuando no haya posible confusión. Ambos conjuntos pueden ser vacíos.*

**Teorema 2.2.4** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\bar{x} \in S$ . Si  $\bar{x}$  es mínimo local del problema*

$$(P) \quad \min_{x \in S} f(x)$$

entonces,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ .

**Demostración.** Razonando por contradicción, supongamos que existe  $d \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ , entonces

$d \in \mathcal{A} \implies$  existe  $\eta > 0$  tal que  $\bar{x} + \lambda d \in S$ ,  $\lambda \in [0, \eta[$  y

$d \in \mathcal{D} \implies$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ ,  $\lambda \in [0, \varepsilon[$ .

Luego  $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ , para todo  $\lambda \in ]0, \min\{\varepsilon, \eta\}[$ , lo que contradice la minimalidad local de  $\bar{x}$ . ■

Sean ahora  $g_1, \dots, g_m$ , funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , diferenciables. Consideremos también el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

y el problema (P) ya definido, que se escribe

$$(P) \quad \min_{g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m} f(x)$$

**Teorema 2.2.5** *Sea  $\bar{x}$  un punto factible de (P), es decir,  $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$ . Sea además  $I = \{i / g_i(\bar{x}) = 0\}$  el conjunto de restricciones activas. Entonces, si  $\bar{x}$  es mínimo local de  $f$ , se cumple que  $\mathcal{G} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , donde  $\mathcal{G} = \{d / \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad \forall i \in I\}$*

**Demostración.** Basta probar que  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$  y luego concluir usando el teorema anterior.

Sea  $d \in \mathcal{G}$  y consideremos el caso  $i \in I$ . Entonces  $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$ , luego existe  $\eta_i > 0$  tal que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) < g_i(\bar{x}) \quad \lambda \in [0, \eta_i[.$$

Notar que el lado derecho de esta última desigualdad es nulo, entonces se tiene que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in [0, \min\{\eta_i\}[.$$

Tomemos ahora  $i \notin I$ . Como  $\bar{x}$  es factible, entonces cumple  $g_i(\bar{x}) < 0$ . De allí, por continuidad, se deduce que existe  $\varepsilon_i > 0$  tal que  $g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in [0, \varepsilon_i[$ .

Sean  $\eta = \min\{\eta_i, i \in I\}$ ,  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i, i \notin I\}$  y  $\Delta = \min\{\eta, \varepsilon\}$ . Entonces podemos decir que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall \lambda \in [0, \Delta[$$

Entonces  $d \in \mathcal{A}$ , lo que completa la demostración. ■

**Teorema 2.2.6 (Karush-Kuhn-Tucker, desigualdades)** *Sea  $\bar{x}$  solución de (P) y supongamos que  $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I\}$  es un conjunto linealmente independiente. Entonces existen  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tales que:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**Demostración.** Sabemos, del teorema anterior, que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ . Entonces, no existe una dirección  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d &< 0 \quad i \in I \end{aligned}$$

Definiendo

$$A = \begin{bmatrix} \nabla f(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla g_i(\bar{x})^T \\ \vdots \end{bmatrix}_{i \in I}$$

podemos interpretar lo anterior como: no existe  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ad < 0$ . Entonces, por el teorema de Gordan, existe  $p \neq 0$  tal que

$$\begin{aligned} A^T p &= 0 \\ p &\geq 0 \end{aligned}$$

Notemos

$$p = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in I}$$

entonces,

$$\mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

donde los coeficientes  $\mu_0, \mu_i$ , para  $i \in I$ , no son todos nulos.

Afirmamos que  $\mu_0 > 0$ . En efecto, si  $\mu_0 = 0$ , entonces se tiene que  $\sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ , donde los coeficientes  $\mu_i$ ,  $i \in I$  no son todos nulos. Eso contradice la hipótesis de independencia lineal.

Así, podemos redefinir los coeficientes  $\mu_i \leftarrow \frac{\mu_i}{\mu_0}$ ,  $\forall i \in I$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i &\geq 0 \quad i \in I, \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $\mu_i$ ,  $i \in I$ , no son todos nulos.

También sabemos que  $g_i(\bar{x}) = 0$  para  $i \in I$  y que  $g_i(\bar{x}) < 0$  para  $i \notin I$ , entonces definiendo  $\mu_i = 0 \quad \forall i \notin I$ , se concluye que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. ■

**Ejemplo 2.2.1** *Veamos cuán importantes son las hipótesis del teorema anterior. El siguiente problema tiene como solución óptima el punto  $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 \\ & -(1-x_1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

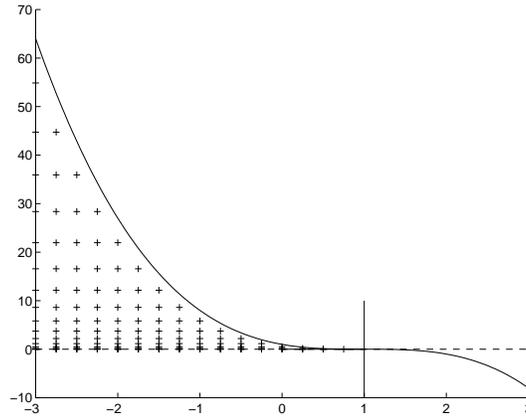


Figura 2.1: El teorema de KKT no es aplicable en el óptimo.

Como puede verse en la Figura (2.1), el teorema de Karush-Kuhn-Tucker no es aplicable en este caso, pues los gradientes de  $g_1$  y  $g_2$  no son linealmente independientes en  $x^*$ .

$$\begin{aligned}\nabla g_1(x^*) &= \begin{pmatrix} 3(1-x_1^*)^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \nabla g_2(x^*) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla f(x^*) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

No existen  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  satisfagan  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

### Interpretación geométrica del teorema de Karush-Kuhn-Tucker

El teorema de Kuhn-Tucker puede ser interpretado geoméricamente como sigue. Consideremos un problema en dos dimensiones como el que se muestra en la Figura (2.2). El cono de direcciones admisibles está dado por:

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2\}\}$$

Bajo la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas, para que  $\bar{x}$  sea un mínimo local, se necesita que el vector  $-\nabla f(\bar{x})$  forme un ángulo obtuso con

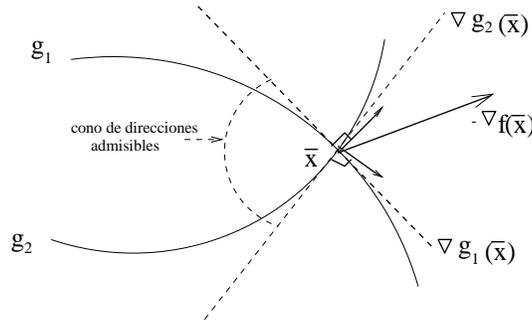


Figura 2.2: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para dimensión dos.

toda dirección admisible  $d$ , lo que equivale a decir que  $-\nabla f(\bar{x})$  debe ser combinación lineal positiva de los vectores del conjunto  $\{\nabla g_i(\bar{x}), \forall i \in I\}$ .

A continuación entregamos sin demostración el enunciado del teorema de Karush-Kuhn-Tucker, extendido al caso de restricciones de igualdad y desigualdad.

**Teorema 2.2.7 (Karush-Kuhn-Tucker, igualdades y desigualdades)** Sean las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $i = 1, \dots, m$  y  $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $j = 1, \dots, l$  diferenciables. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Sean  $\bar{x}$  un punto factible e  $I$  el conjunto de restricciones activas en  $\bar{x}$ . Supongamos que el conjunto  $\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}), i \in I, j = 1, \dots, l\}$  es linealmente independiente.

Entonces, si  $\bar{x}$  es solución de (P), existen  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\nu_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, l$  tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l \nu_j \nabla h_j(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Tal como en el caso de desigualdades, la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas es demasiado fuerte, y el teorema sigue siendo válido aún cuando

esta hipótesis no se cumpla. Una aplicación interesante de esta versión del teorema de KKT es el caso de la Programación Lineal, que es el tema del próximo capítulo. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y los vectores  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  son los datos del problema. Se puede escribir equivalentemente,

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ -x &\leq 0 \\ Ax - b &= 0 \end{aligned}$$

de manera que las funciones  $f$ ,  $g_i$  y  $h_j$  del problema general están dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &= c^T x \\ g_i(x) &= -x_i \\ h_j(x) &= \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - b_j \end{aligned}$$

Los gradientes respectivos son

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= c \\ \nabla g_i(x) &= -e_i \\ \nabla h_j(x) &= (a_{j1}, \dots, a_{jn})^T \end{aligned}$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Las ecuaciones de KKT en este caso se pueden escribir

$$\begin{aligned} c + \sum_{i=1}^n u_i(-e_i) + \sum_{j=1}^m v_j(a_{j1}, \dots, a_{jn})^T &= 0 \\ u_i(-x_i) &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Introduciendo el cambio de variable  $y = -v$  se obtiene

$$\begin{aligned} A^T y + u &= c \\ u^T x &= 0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces la caracterización completa de la solución del problema de Programación Lineal es la siguiente:  $x$  es solución del problema  $(P)$  si y sólo si existen vectores  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , tales que

$$\begin{aligned}Ax &= b \\ A^T y + u &= c \\ u^T x &= 0 \\ x, u &\geq 0\end{aligned}$$

Este es un sistema difícil de resolver, dado que algunas variables deben ser positivas ( $x$  y  $u$ ) y además deben satisfacer una ecuación no lineal (ortogonalidad de  $x$  y  $u$ ). En los capítulos siguientes daremos una interpretación de este sistema.

# Capítulo 3

## Programación Lineal

### 3.1. Introducción y ejemplos

Un problema de programación lineal se escribe de manera explícita como:

$$\begin{array}{rcccccccc} (PL) & \text{mín} & c_1x_1+ & c_2x_2+ & \dots + & c_{n-1}x_{n-1}+ & c_nx_n & & \\ & & a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \dots + & a_{1,n-1}x_{n-1}+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & \dots + & a_{2,n-1}x_{n-1}+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{m,1}x_1+ & a_{m,2}x_2+ & \dots + & a_{m,n-1}x_{n-1}+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \\ & & & & & & & & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array}$$

o en forma compacta como:

$$\begin{array}{r} (PL) \text{ mín } c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

con  $x, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , con  $m \leq n$ .

En la **función objetivo** o **criterio**  $c^T x$ , la variable  $x$  se conoce como **variable de decisión** o **nivel de actividad** y  $c$  como **vector de costos**.

El conjunto de restricciones  $\mathcal{P} = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$  es un poliedro cerrado y se llama **conjunto factible**. La matriz  $A$  se conoce como la **matriz de coeficientes técnicos** y  $b$

como **vector de recursos** o, simplemente, **lado derecho**.

Otras definiciones preliminares:

- Si  $\mathcal{P}$  es acotado, entonces existe solución, pues se minimiza una función (lineal) continua sobre un conjunto compacto (el poliedro  $\mathcal{P}$  es cerrado).
- Si  $\mathcal{P}$  es no acotado, puede ocurrir que  $c^t x \rightarrow -\infty$ , con  $x \in \mathcal{P}$ .
- Se dirá que el problema ( $PL$ ) es **acotado** si y solamente si  $\exists \bar{x} \in \mathcal{P} : c^T \bar{x} \leq c^T x, \forall x \in \mathcal{P}$ .
- Se dirá que el problema ( $PL$ ) es **no acotado** si y solamente si  $\exists d \in \mathbb{R}^n, x_o \in \mathcal{P}$  tales que  $c^t(x_o + \lambda d) \rightarrow -\infty$  si  $\lambda \rightarrow \infty$ , con  $x_o + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda > 0$ . Es evidente que si ( $PL$ ) es no acotado, entonces  $\mathcal{P}$  es no acotado. La otra implicancia no siempre es cierta, como veremos cuando estudiemos cómo resolver un programa lineal.
- Se dirá que el problema ( $PL$ ) es infactible si y sólo si  $\mathcal{P} = \emptyset$ .

## Formas canónicas de un programa lineal

Dos formas habituales de escribir ( $PL$ ) para su estudio son:

1) Forma de desigualdad:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \end{array}$$

2) Forma estándar o canónica:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Estas dos formas son equivalentes pues los poliedros  $\{x/Ax = b, x \geq 0\}$  y  $\{x/Ax \leq b\}$  son equivalentes, en el sentido que se puede pasar de una forma a otra mediante cambios simples en las variables y restricciones, como por ejemplo:

- Pasar de  $\geq$  a  $\leq$  multiplicando la restricción por  $-1$ .
- Pasar de  $\leq$  a  $=$  usando una variable de holgura, es decir:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \text{ puede escribirse en la forma } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_j,$$

con  $x_{n+1} \geq 0$ . Notar que en este caso el problema aumenta en una variable por cada restricción de desigualdad convertida en igualdad.

- Una variable irrestricta  $x$  puede ser reemplazada por dos variables no negativas  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ , escribiendo  $x = x_1 - x_2$
- Maximizar  $c^T x$  es equivalente a minimizar  $-c^T x$

**Ejemplo 3.1.1** *El problema*

$$\begin{array}{rcl} \text{máx} & c_1 x_1 + & c_2 x_2 \\ & x_1 - & 3x_2 \geq 8 \\ & x_1 & \geq 0 \end{array}$$

es equivalente al problema (haciendo  $x_2 = u - v$ , con  $u, v \geq 0$ ).

$$\begin{array}{rcl} - \text{mín} & -c_1 x_1 - & c_2 u + & c_2 v \\ & -x_1 + & 3u - & 3v \leq -8 \\ & & & x_1, u, v \geq 0 \end{array}$$

que a su vez, es equivalente al problema:

$$\begin{array}{rcl} - \text{mín} & -c_1 x_1 - & c_2 u + c_2 v \\ & -x_1 + & 3u - 3v + y = -8 \\ & & x_1, u, v, y \geq 0 \end{array}$$

Plantear un problema de optimización requiere comprender la estructura del mismo y ser ordenado y creativo a la hora de darle forma.

## 3.2. Resolución de problemas de Programación Lineal: algoritmo Simplex

**Teorema 3.2.1** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro no vacío en la forma canónica y sea el problema*

$$(P) \begin{array}{l} \text{mín} \quad c^T x \\ x \in \mathcal{P} \end{array}$$

Entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(i)  $(P)$  es no acotado.

(ii)  $(P)$  tiene un vértice (punto extremo) como solución.

**Demostración.** Supongamos que existe una dirección extrema  $d$  tal que  $c^T d < 0$ . Entonces, dado que el poliedro es no vacío, elijamos  $x_0 \in \mathcal{P}$ . Es evidente que  $x_0 + \alpha d \in \mathcal{P}$  y que  $c^T(x_0 + \alpha d) \rightarrow -\infty$ , si  $\alpha \rightarrow \infty$ . Entonces  $(P)$  es no acotado, lo que prueba (i).

Contrariamente, si no existe una dirección extrema  $d$  (en particular, si el poliedro es acotado, es decir, no existen direcciones extremas) tal que  $c^T d < 0$ , entonces aplicando el Teorema 1.1.3 al punto  $x_0$  se tiene que

$$c^T x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j c^T d_j$$

donde  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $\mu_j \geq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, l$ .

Dado que  $\sum_{j=1}^l \mu_j c^T d_j \geq 0$  entonces

$$c^T x_0 \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i$$

y si elegimos  $q$  tal que  $c^T x_q = \min\{c^T x_1, \dots, c^T x_k\}$  entonces

$$c^T x_0 \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_q = c^T x_q$$

lo que muestra que  $x_q$  es solución de  $(P)$ , puesto que  $x_0$  es arbitrario en  $\mathcal{P}$ . Es decir, la solución se encuentra en un punto extremo. Esto termina la prueba. ■

## Motivación: solución gráfica en $\mathbf{R}^2$

Consideremos el siguiente problema lineal

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Gráficamente, en un problema de minimización, lo que se hace es desplazar la recta que representa los costos en la dirección  $-c$ , que es la dirección de máximo descenso. Con esto tenemos que el valor óptimo será aquel último punto factible que alcance la función objetivo en su descenso.

Desgraciadamente, para dimensión mayor o igual a 3, ya no es posible resolver estos problemas de manera gráfica.

Vimos que para poder resolver un problema de programación lineal necesitamos sólo considerar los vértices del poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  como candidatos a solución óptima del problema. Para un número grande de variables ( $n$ ) y restricciones ( $m$ ) vimos también que el número de vértices puede ser enorme,  $\binom{n}{m}$ , por lo que una metodología más sistemática se hace necesaria.

### 3.2.1. Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso

El método simplex, desarrollado por G. Dantzig en los años cuarenta, tiene una idea geométrica muy simple: primero se encuentra una base factible (un vértice de  $\mathcal{P}$ ) y luego se pasa de vértice a otro, a través de las aristas de  $\mathcal{P}$  que sean direcciones de descenso para la función objetivo, generando una sucesión de vértices cuyos valores por  $f(x) = c^T x$  son decrecientes, con lo que se asegura que un mismo vértice no es visitado dos veces. Así, como el número de vértices es finito, el algoritmo converge en tiempo finito; esto significa que encuentra una solución óptima, o una arista a lo largo de la cual la función objetivo es no acotada.

A la búsqueda de una base factible se la llama Fase I del algoritmo Simplex (esto se verá más adelante). El resto del procedimiento (que describiremos a continuación) se conoce como Fase II.

Consideremos el problema

$$(P) \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & x \in \mathcal{P} \end{array}$$

con  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ .

Supondremos que  $A \in \mathcal{M}_{mn}$  es de rango  $m$ , entonces puede escribirse de la forma  $A = [B, N]$ , con  $B \in \mathcal{M}_{mm}$  invertible.

Notemos  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ . Entonces,  $Ax = Bx_B + Nx_N = b$  con lo que fi-

nalmente  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ .

El problema (P) es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Si se cumple que  $B^{-1}b \geq 0$ , consideramos el punto extremo de  $\mathcal{P}$ :  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Entonces

$$\bar{c}^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b.$$

Si se tiene esta solución en curso y si  $c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$ , no es aconsejable dar valor positivo a las variables en  $x_N$  (la función objetivo no podría decrecer al hacer eso).

**Definición 3.2.1** La cantidad  $\pi^T = c_B^T B^{-1}$  se conoce como **vector de multiplicadores del Simplex**. Esta terminología proviene de la interpretación de las componentes de  $\pi$  como multiplicadores de Lagrange y como precio de equilibrio en el óptimo, como veremos más adelante.

A continuación examinaremos por separado, con la ayuda de un ejemplo, los tres casos que pueden aparecer cuando estamos en presencia de un punto extremo y a partir de esto generaremos la formulación general del Algoritmo Simplex.

## CASO 1: criterio de optimalidad

**Ejemplo 3.2.1** Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_3 + x_4 \\ & -3x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & -8x_3 + 4x_4 \leq 4 \\ & x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

escrito en la forma canónica:

$$\begin{array}{rcll}
\text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 \\
& x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & 6 \\
& & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = & 4 \\
& & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1, 2, 3, 4
\end{array}$$

Elijamos  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $N = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

donde:

$x_B$  : variables básicas o en la base ( $x_1, x_2$  en este caso)

$x_N$  : variables no-básicas o fuera de la base ( $x_3, x_4$  en este caso)

$x_1, x_2$  : variables de holgura

$x_3, x_4$  : variables estructurales

Se puede despejar  $x_1, x_2$  en función de  $x_3, x_4$  y reemplazar en la función objetivo. Notar que todo queda igual, pues  $B = I$  y  $\bar{c}_B = 0$ .

Como  $c_N^T - \pi^T N = (3, 1) \geq 0$ , la solución  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es óptima.

### Criterio de optimalidad:

En un problema de minimización escrito en la forma canónica, si las variables no básicas tienen asociado un vector de coeficientes  $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N \geq 0$ , entonces la solución  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es óptima.

Habitualmente, los datos se ordenan en un cuadro:

$$\begin{array}{c|c|c}
0 & \bar{c}_N^T & -\pi^T b \\
\hline
I & B^{-1}N & B^{-1}b
\end{array}$$

El vector  $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N$  se llama **vector de costos reducidos**.

## CASO 2: criterio de no acotamiento

**Ejemplo 3.2.2** Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} \text{mín} & -3x_3 & +x_4 & \\ & -3x_3 & +3x_4 & \leq 6 \\ & -8x_3 & +4x_4 & \leq 4 \\ & & x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento anterior, escribamos la siguiente tabla:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	-3	1	$0 = -\pi^T b$
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

Tal como en el ejemplo anterior,  $x = (6 \ 4 \ 0 \ 0)^T$  es una solución factible; pero no es óptima, pues  $\bar{c}_3 < 0$ .

¿Conviene hacer crecer una variable no básica a un valor positivo? Es claro que sí, conviene que la variable  $x_3$  tome un valor positivo.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_4 + 6 + 3x_3 \\ x_2 &= -4x_4 + 4 + 8x_3 \end{aligned}$$

Tomando  $x_4 = 0$  (fuera de la base),  $x_3$  puede crecer indefinidamente, disminuyendo el valor de la función objetivo, sin violar las restricciones, dado que las variables  $x_1$  y  $x_2$  se mantienen positivas. Este problema es no acotado.

### Criterio de no acotamiento:

Si un costo reducido es negativo y los elementos en la columna correspondiente son negativos o nulos, en al menos una de las filas, entonces el problema es no acotado.

**Observación 3.2.1** Si la columna es enteramente nula, la variable es irrelevante.

### CASO 3: criterio de mejoramiento de la solución en curso

**Ejemplo 3.2.3** *Veamos ahora el ejemplo:*

$$\begin{array}{rcll} \text{mín} & 3x_3 & -x_4 & \\ & -3x_3 & +3x_4 & \leq 6 \\ & -8x_3 & +4x_4 & \leq 4 \\ & & x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Escribamos la tabla:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	3	-1	0
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

La variable  $x_4$  es no básica y su costo reducido es negativo<sup>1</sup>, luego conviene hacerla entrar a la base.

¿Cuánto puede crecer? Los datos en la columna asociada son todos positivos, luego el crecimiento es acotado.

$$\begin{array}{l} x_1 = -3x_4 + 6 \\ x_2 = -4x_4 + 4 \\ x_3 = 0 \quad \text{(fuera de la base)} \end{array}$$

Se necesita que  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ , lo que implica que  $x_4 \leq 1$ . Más aún,

$$x_4 = \text{mín} \left\{ \frac{6}{3}, \frac{4}{4} \right\} = \text{mín} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ij}} / \bar{a}_{ij} > 0 \right\}.$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	3	-1	0
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4 $\rightarrow r$

---

<sup>1</sup>Si bien no hay resultados respecto a la elección entre las variables con costos negativos, conviene hacer ciertas convenciones. En este caso elijiremos siempre la variable de costo reducido *más* negativo

### Criterio de pivoteo (mejorar solución en curso):

Se hace entrar a la base alguna (cualquiera) variable no básica cuyo costo reducido sea negativo. Sea  $x_s$  la elegida. Para decidir cuál es la variable que entra en su reemplazo, se busca la fila  $r$  tal que  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\}$  y se pivotea sobre el coeficiente en la posición  $(s, r)$ .

Escribamos ahora el algoritmo completo para la Fase II, es decir suponiendo que se parte de una solución básica factible conocida.

$$\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{z} \\ \bar{a}_{11} & & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

Donde suponemos que  $\bar{b}_i \geq 0$ , que en la matriz  $A$  hay una identidad correspondiente a las columnas no básicas y que los costos reducidos de las variables básicas son nulos.

### Algoritmo Simplex

- (1) Si  $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ , entonces la solución en curso es óptima. Las variables básicas son iguales a  $\bar{b}_i$  y las no básicas son nulas.
- (2) Si  $\bar{c}_j < 0$  para algún  $j$ , la elegimos para entrar a la base. Usaremos el criterio descrito anteriormente de elegir la variable cuyo costo reducido es menor. Supongamos que dicha variable es la  $s$ .
- (3) Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ , el problema es no acotado.
- (4) Si  $\bar{a}_{is} > 0$  para algún  $i$ , se determina  $r$  tal que  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\}$  y se pivotea en  $\bar{a}_{rs}$ , para después volver a (1). Los coeficientes son modificados según:

- $\bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \quad \text{para } i \neq r$
- $\bar{a}_{rj} \leftarrow \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \quad \text{para } i \neq r$

- $\bar{b}_r \leftarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $-\bar{z} \leftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$

**Observación 3.2.2** *Notar que esto corresponde precisamente al pivoteo de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

**Ejemplo 3.2.4** *Consideremos*

$$\begin{array}{rcll} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

El problema, escrito en la forma canónica, queda:

$$\begin{array}{rcllcl} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Escribamos la tabla:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} \downarrow s & & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \\ -3 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & \rightarrow r \end{array} & \rightsquigarrow (\text{pivoteando}) & \begin{array}{ccccc|c} \downarrow s & & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 6 & \\ \hline \boxed{4} & 0 & 1 & -1 & 1 & \rightarrow r \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \\ \\ \rightsquigarrow & \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 17/2 & \\ \hline 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 11/4 & \end{array} \end{array}$$

De este cuadro final identificamos  $x^* = (\frac{1}{4} \quad \frac{11}{4} \quad 0 \quad 0)^T$  como la solución óptima, luego el valor óptimo es  $z^* = -17/2$

**Definición 3.2.2** Si una o más variables básicas son nulas, entonces la solución se dice *degenerada*. En caso contrario, la llamaremos **no-degenerada**.

**Observación 3.2.3** Cuando la solución  $x$  de un PL es degenerada, existe más de una base asociada a ese vértice. En efecto, si  $x \in \mathbb{R}^n$  tiene  $p < m$  componentes positivas, donde  $m$  es el número de restricciones del problema, entonces podrían haber  $\binom{n-p}{m-p}$  soluciones básicas factibles diferentes correspondientes a  $x$ .

El punto  $x$  es el mismo, pero los conjuntos de variables etiquetadas básicas y no básicas son diferentes.

### 3.2.2. Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible

Hasta ahora, sabemos resolver un PL dada una solución básica inicial. Cuando se trata de un problema de inecuaciones de tipo  $\leq$  y el lado derecho es positivo o nulo, entonces la base de partida es trivial: está dada por las variables de holgura. La Fase I del Simplex consiste en encontrar una base factible cuando identificarla no es trivial.

Sabemos que el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se puede resolver mediante el algoritmo Simplex, recorriendo puntos extremos de la forma

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

que se llaman soluciones básicas factibles.

El problema es conocer una solución básica factible para comenzar el algoritmo. Este problema (que corresponde a investigar la factibilidad de  $(PL)$ ) puede plantearse mediante el siguiente problema auxiliar:

$$(P_a) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_i x_{ai} \\ & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $x_a \in \mathbb{R}^m$ . Bajo el supuesto razonable  $b \geq 0$ , una solución básica factible evidente para este problema es  $x = 0$  y  $x_a = b$ , luego podemos usar la Fase II del algoritmo simplex para resolverlo.

El problema  $(P_a)$  se resuelve considerando  $B = I$  ( $x_a$  en la base),  $N = A$ ,  $c_B = \mathbf{1}^T$  y  $c_N = 0^T$ . Así, para este problema el cuadro inicial es:

$$\frac{\bar{c}_N^T \quad 0 \quad | \quad -c_B^T b}{A \quad I \quad | \quad b} \iff \frac{c_N^T - c_B^T A \quad 0 \quad | \quad -c_B^T b}{A \quad I \quad | \quad b} \iff \frac{-\mathbf{1}^T A \quad 0 \quad | \quad -\mathbf{1}^T b}{A \quad I \quad | \quad b}$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector que tiene todas sus coordenadas iguales a 1, de manera que  $\mathbf{1}^T b = b_1 + \dots + b_m$ . Las variables  $x_{ai}$  son llamadas *variables artificiales* y el propósito del problema  $(P_a)$  es llevarlas a tomar valores nulos. Esto es posible, siempre que el problema original tenga una solución factible. En tal caso, el método Simplex terminará con una solución básica factible, donde  $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ .

Si en el óptimo de  $(P_a)$  se tiene algún  $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ , entonces la solución en curso es solución factible de  $(P)$ . La solución de  $(P_a)$  satisface

$$[A \ I] \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} = b,$$

con  $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \geq 0$ , luego  $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix}$  es solución de  $(P_a)$  si y sólo si  $x$  es solución de  $(P)$ .

Si en el óptimo de  $(P_a)$  se tiene algún  $x_{ai} > 0$ , entonces el poliedro es vacío, es decir,  $(P)$  es infactible.

### Ejemplo 3.2.5 Consideremos

$$\begin{array}{rcll} \text{máx} & -x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & -x_2 & = 0 \\ & x_1 & & \leq 4 \\ & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{array}$$

Escribamos el problema en su forma canónica:

$$\begin{array}{rcll}
(P) & - \text{mín} & x_1 & -2x_2 \\
& & x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\
& & x_1 & & & +x_4 & = & 4 \\
& & x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
& & & & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{array}$$

Luego, agregando las variables artificiales  $x_5, x_6, x_7$  (son tres, dado el número de restricciones del problema  $(P)$ ), tenemos:

$$\begin{array}{rcll}
\text{mín} & & & x_5 & +x_6 & +x_7 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_5 & & & = & 1 \\
x_1 & & & +x_4 & +x_6 & & = & 4 \\
x_1 & -x_2 & & & & +x_7 & = & 0 \\
& & & & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7
\end{array}$$

Ya tenemos planteado el problema que necesitamos resolver. Escribamos la tabla y apliquemos el método Simplex<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \leftarrow \end{array} \quad x^1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T$$

Primera iteración:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \leftarrow \end{array} \quad x^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T$$

Segunda iteración:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \leftarrow \end{array} \quad x^3 = \left( \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \right)^T$$

<sup>2</sup>las negrillas señalan las variables en la base para cada iteración.

Tercera iteración:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{array}
 \quad x^4 = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

En la última iteración todas las variables artificiales salen de la base, los costos reducidos asociados toman todos el valor 1 y  $z = 0$ .

Ya tenemos una solución básica factible. Ahora eliminamos las variables artificiales y recalculamos los costos reducidos y el valor objetivo para esta solución:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2
 \end{array}$$

El vector de costos está dado por  $c^T = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^T$ , por lo tanto:

$$c_B^T = (c_2 \quad c_4 \quad c_1)^T = (-2 \quad 0 \quad 1)^T, \quad c_N^T = (c_3) = (0)$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado.

Reconozcamos las matrices  $B$  y  $N$  en el problema original ( $P$ ):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los costos reducidos serán:

$$\bar{c}_B^T = (0 \quad 0 \quad 0),$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - (-2 \quad 0 \quad 1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\left(-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)^T \text{ columna no básica del cuadro}} = -\frac{1}{2}$$

En tanto que:

$$-\pi^T b = (-2 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Con esto el cuadro queda:

$$\begin{array}{cccc|c} & & \downarrow & & \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \rightarrow \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Iterando una vez según la Fase II algoritmo Simplex, obtenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

con lo cual  $x^T = (4 \ 4 \ 7 \ 0)$  es solución óptima para el problema, y el valor de la función objetivo es  $-(-\pi^T b) = 4$  (recordemos que hicimos el cambio  $\text{máx } z = -\text{mín } -z$ ).

### 3.3. Programación Lineal Entera (ramificación y acotamiento)

En esta sección presentamos una forma de resolver el problema de Programación Lineal con la restricción adicional de integridad de algunas de las variables. Un caso particular muy importante de esto es aquel en que algunas variables pueden tomar solamente los valores 0 ó 1 (variables binarias o de decisión). Suponiendo que los costos son números enteros, introduciremos el método a través de un ejemplo simple; consideremos

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 51x_1 + 90x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \geq 45 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array}$$

El método funciona de la siguiente manera: se resuelve primero el problema relajado siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
(P_0) & \text{mín} & 51x_1 + 90x_2 \\
& & x_1 + x_2 \geq 6 \\
& & 5x_1 + 9x_2 \geq 45 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

(en el caso de variables 0 – 1, la relajación corresponde a imponer restricciones del tipo  $x_i \in [0, 1]$ ).

La solución de  $(P_0)$  es  $(x_1, x_2) = (\frac{9}{4}, \frac{15}{4})$ , con valor  $z_0^* = 452,25$ . Si denotamos  $z^*$  al desconocido valor óptimo de  $(P)$ , entonces es claro que  $z_0^* \leq z^*$ , pues la región factible de  $(P_0)$  contiene a la región factible de  $(P)$ .

Dado que los costos son enteros, se puede deducir una cota de  $(P)$ :  $z^* \geq 453$ .

Acotamos una de las variables ( $x_1$ ), que toma valor no entero, en la forma  $x_1 \leq 2$  o bien  $x_1 \geq 3$ . Eso divide la región factible en dos subregiones que conforman una partición de la región factible de  $(P)$ . Se resuelve por separado los dos subproblemas así generados:

$$\begin{array}{rcl}
(P_{11}) & \text{mín} & 51x_1 + 90x_2 \\
& & x_1 + x_2 \geq 6 \\
& & 5x_1 + 9x_2 \geq 45 \\
& & x_1 \leq 2 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
(P_{12}) & \text{mín} & 51x_1 + 90x_2 \\
& & x_1 + x_2 \geq 6 \\
& & 5x_1 + 9x_2 \geq 45 \\
& & x_1 \geq 3 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

sabiendo que la solución de  $(P)$  se encuentra en una de las dos subregiones factibles de estos problemas  $(P_{11})$  y  $(P_{12})$ . Veamos entonces las soluciones de estos problemas:

- para  $(P_{11})$ :  $(x_1, x_2) = (2, 4)$ ,  $z_{11}^* = 462$ ;
- para  $(P_{12})$ :  $(x_1, x_2) = (3, \frac{10}{3})$ ,  $z_{12}^* = 453$ .

Dado que  $(P_{11})$  tiene solución entera, representa una solución factible para el problema original  $(P)$ . Entonces ese problema ya no dará origen a subproblemas, pues no hay variables para subdividir, y establece una cota para la función objetivo:  $z^* \leq 462$ .

Análogamente, el problema  $(P_{12})$  tiene una solución no entera, de modo que su valor óptimo es una cota inferior del valor óptimo del problema  $(P)$  original, es decir,  $z^* \geq 453$ .

En esta etapa corresponde entonces subdividir según el subproblema  $(P_{12})$ , en la forma:

$x_2 \leq 3$  o bien  $x_2 \geq 4$ . La variable  $x_2$ , en este caso, es la única que permite ramificar, pero en general puede haber muchas y en ese caso se elige cualquiera. Tenemos entonces dos subproblemas a partir de  $(P_{12})$ :

$$\begin{array}{rcl}
 (P_{121}) \text{ mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & & x_2 \leq 3 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 (P_{122}) \text{ mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & & x_2 \geq 4 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Las soluciones respectivas son:

- para  $(P_{121})$ :  $(x_1, x_2) = (\frac{18}{5}, 3)$ ,  $z_{121}^* = 453, 6$ ;
- para  $(P_{122})$ :  $(x_1, x_2) = (3, 4)$ ,  $z_{122}^* = 513$ .

Esto entrega el nuevo intervalo:  $454 \leq z^* \leq 462$ .

Si denotamos  $(P_k)$  a un subproblema cualquiera de la ramificación, entonces se detiene el proceso de búsqueda en la rama correspondiente cada vez que ocurre una de las 3 situaciones siguientes:

- El subproblema  $(P_k)$  es infactible. Cualquier ramificación (que corresponde a agregar restricciones) que se haga de ahí en adelante generará subproblemas infactibles.
- El subproblema  $(P_k)$  entrega una solución entera. Dado que la región factible de  $(P_k)$  está contenida en la región factible del problema  $(P)$ , entonces la solución del subproblema es factible para  $(P)$  y por lo tanto provee una cota superior del valor óptimo  $z^*$  buscado.
- El subproblema  $(P_k)$  tiene solución no entera y su valor óptimo es mayor que la menor cota superior de  $z^*$  establecida por los subproblemas precedentes que han entregado soluciones enteras.

Para la aplicación de estas reglas hay que tener en cuenta que:

- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución entera, se genera una cota superior de  $z^*$ .

- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución no entera, se puede ramificar y se dispone de una nueva cota inferior de  $z^*$ .

Estos dos hechos permiten establecer una sucesión decreciente de intervalos que contienen el valor  $z^*$  y que pueden ser usados como criterio de detención, cuando no se busca necesariamente la solución óptima de  $(P)$ , sino que solamente una buena aproximación de ella.

En nuestro ejemplo, la rama a partir de  $(P_{122})$  debe detenerse por dos razones: tiene solución entera y también el valor  $z_{122} = 513$  es mayor que la mejor cota  $z^* \leq 462$ .

Contrariamente, se puede ramificar de nuevo a partir del problema  $(P_{121})$ , según la variable  $x_1$ , que toma el valor 3,6 en dicho problema. Siguiendo este proceso se llega finalmente a la solución del problema original:

- $(x_1^*, x_2^*) = (9, 0)$ ,  $z^* = 459$ ,

que proviene de la resolución del subproblema:

$$\begin{array}{rllll}
 \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 & & \\
 & x_1 & +x_2 & \geq & 6 \\
 & 5x_1 & +9x_2 & \geq & 45 \\
 & x_1 & & \geq & 3 \\
 & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & \geq & 4 \\
 & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & \geq & 6 \\
 & & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & \geq & 8 \\
 & & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 & 
 \end{array}$$

Este método, si bien es convergente, puede ser muy ineficiente del punto de vista del inmenso número de subproblemas que puede ser necesario resolver para llegar a la solución. En el ejemplo aquí presentado, de sólo dos variables, ha sido necesario "bajar" hasta el noveno nivel del árbol y resolver 17 subproblemas para encontrar la solución. Mucha investigación se ha llevado a cabo con el fin de mejorar la eficiencia de este método básico y actualmente se dispone de muy buenas estrategias de solución para problemas muy grandes (varios miles de variables) de Programación Lineal Mixta (con variables enteras y continuas).

Como último comentario, se puede observar que si se hubiese aproximado la solución del primer problema relajado ( $P_0$ ) al entero más cercano, se habría propuesto la solución aproximada

- $(x_1^*, x_2^*) = (2, 4), z^* = 462,$

que está bastante lejos de la solución exacta encontrada mediante el método. Ese es un peligro que se corre cuando se resuelve el problema relajado y luego se aproximan los valores de las variables al entero más cercano. Eventualmente este tipo de soluciones aproximadas puede ser infactible.

# Capítulo 4

## Dualidad en Programación Lineal

Comenzaremos el estudio de la dualidad en programación lineal con un ejemplo.

**Ejemplo 4.0.1** *Una fábrica produce tres artículos en cantidades  $x_1, x_2, x_3$ , los cuales utilizan dos materias primas en su elaboración, digamos  $a$  y  $b$ .*

*El proceso de producción debe satisfacer lo siguiente:*

1) *Para producir una unidad del artículo 1 se necesitan 2 unidades del recurso  $a$  y 5 del recurso  $b$ .*

*Para producir una unidad del artículo 2 se necesitan 3 unidades del recurso  $a$  y 2 del recurso  $b$ .*

*Para producir una unidad del artículo 3 se necesita 1 unidad del recurso  $a$  y 1 del recurso  $b$ .*

2) *El recurso  $a$  está disponible hasta 10 unidades y el recurso  $b$  hasta 20 unidades.*

*El precio unitario de venta del producto 1 es \$4, el del producto 2 es \$1 y el del producto 3 es \$5.*

*El problema del fabricante será el de maximizar sus utilidades (sus ingresos por venta, en este ejemplo) sujeto a sus restricciones en la producción.*

El problema se plantea entonces en la forma:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad \text{máx} \quad & 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\
 & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Tomemos una combinación lineal positiva de las restricciones, con multiplicadores  $y_1, y_2$ :

$$y_1(2x_1 + 3x_2 + x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 + x_3) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Esto que puede reescribirse de la forma:

$$x_1(2y_1 + 5y_2) + x_2(3y_1 + 2y_2) + x_3(y_1 + y_2) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Si imponemos las condiciones (1):

$$\begin{aligned}
 2y_1 + 5y_2 & \geq 4 \\
 3y_1 + 2y_2 & \geq 1 \\
 y_1 + y_2 & \geq 5
 \end{aligned}$$

entonces,

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10y_1 + 20y_2 = \omega,$$

es decir,  $\omega$  acota superiormente a la función objetivo de (P) cuando se satisface (1). Luego, es razonable preguntarse si el mínimo de la función  $\omega$  es igual máximo de la función  $z$ . Es decir, planteamos el siguiente problema asociado a los multiplicadores  $y_i$ :

$$\begin{aligned}
 (D) \quad \text{mín} \quad & 10y_1 + 20y_2 \\
 & 2y_1 + 5y_2 \geq 4 \\
 & 3y_1 + 2y_2 \geq 1 \\
 & y_1 + y_2 \geq 5 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

y quisiéramos averiguar si el valor **máximo de  $z$**  (óptimo de (P)) coincide con el valor **mínimo de  $\omega$**  (óptimo de (D)).

Notemos que partimos de un problema de la forma

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{máx } (4 \ 1 \ 5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

y llegamos a otro de la forma

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{mín } (10 \ 20) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 4.1. Definición de dualidad y principales propiedades

Lo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 4.1.1** *Sea:*

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{máx } c^T x \\
 & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

un problema que llamaremos **problema primal**. El problema:

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{mín } b^T y \\
 & A^T y \geq c \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

se llamará **problema dual de (P)**.

**Teorema 4.1.1** *La dualidad es simétrica, es decir, el dual de (D) es (P).*

**Demostración.** Para demostrar este teorema tomaremos el problema:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

y lo transformaremos para escribirlo en forma "primal", es decir, como un problema de maximización, con restricciones de tipo  $\leq$ , y positividad en las variables. Esto es, (D) es equivalente a:

$$(\tilde{D}) \quad \begin{array}{ll} - \text{máx} & (-b)^T y \\ & (-A)^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

El problema dual asociado a  $(\tilde{D})$ , según la definición anterior, es:

$$\begin{array}{ll} - \text{mín} & (-c)^T x \\ & (-A)x \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que a su vez es equivalente a:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que es entonces el dual de (D). ■

**Observación 4.1.1** *El teorema precedente muestra que las nociones de primal y dual son arbitrarias, en el sentido que ambos problemas son duales mutuos. Así, como se verá más adelante, cualquier problema puede ser denominado primal y su dual, que siempre existe, no es único, en el sentido que un mismo problema puede escribirse en más de una forma.*

*Una noción limpia de dualidad requiere que las variables de un problema pertenezcan a un espacio cuya dimensión sea igual al número de restricciones del dual (por restricciones entendemos las ecuaciones o inecuaciones lineales, sin incluir las condiciones de signo de las variables).*

**Teorema 4.1.2 (Teorema de Dualidad Débil)** *Sea*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

*un problema primal y*

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

*su dual. Consideremos también  $x$  e  $y$ , puntos factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces se cumple*

$$c^T x \leq b^T y$$

*es decir, la función objetivo del problema dual acota (en este caso, superiormente) a la del primal.*

**Demostración.** Si multiplicamos por  $x^T$  ( $\geq 0$ ) la inecuación  $A^T y \geq c$ , se obtiene que  $x^T A^T y \geq x^T c$ , de donde  $c^T x \leq (Ax)^T y \leq b^T y$ , pues  $y \geq 0$ . ■

**Corolario 4.1.1** *Sean  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  puntos factibles para (P) y (D). Si  $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$ , entonces  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  son óptimos respectivos.*

**Demostración.** Es consecuencia directa del teorema de Dualidad Débil:

$b^T \tilde{y} = c^T \tilde{x} \leq b^T y \quad \forall y$  punto factible de (D), es decir,  $\tilde{y}$  es óptimo de (D).

$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y} \geq c^T x \quad \forall x$  punto factible de (P), es decir,  $\tilde{x}$  es óptimo de (P). ■

**Ejercicio 4.1.1** *El dual del problema de Programación Lineal estándar*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

*es el problema*

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

**Hint.** Para resolver este ejercicio, se sugiere desdoblar la restricción de igualdad en el problema (P), escribirla en forma  $\geq$  y luego aplicar la definición de dualidad.

**Teorema 4.1.3 (Teorema de Dualidad Fuerte)** *Consideremos la pareja primal-dual*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

Entonces, para  $\tilde{z}$ , valor mínimo de (P) y  $\tilde{\omega}$ , valor máximo de (D), se tiene:

- a) Si  $\tilde{z}$  es finito, entonces  $\tilde{\omega}$  también lo es y se cumple  $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- b) Si  $\tilde{\omega}$  es finito, entonces  $\tilde{z}$  también lo es y se cumple  $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- c) Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible
- d) Si (D) es no acotado, entonces (P) es infactible

**Demostración.**

- a) Dado que  $\tilde{z}$  es finito, existe un  $\tilde{x}$  solución óptima básica factible de (P). Entonces existe también  $B$ , submatriz de  $A = [B, N]$ , tal que  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix}$

Además, en el óptimo los costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir para  $\pi = B^{-T}c_B$  se tiene

$$c_N^T - \pi^T N \geq 0$$

lo que implica

$$N^T \pi \leq c_N$$

Probaremos que  $\pi$  es solución básica factible óptima de (D), con lo cual,  $\tilde{\omega} = b^T \pi$  será finito.

En efecto,  $\pi$  es factible para (D), pues

$$A^T \pi = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} B^{-T} c_B = \begin{pmatrix} c_B \\ N^T \pi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = c$$

y  $\pi$  es óptimo para (D), pues

$$\tilde{\omega} = b^T \pi = b^T B^{-T} c_B = (c_B^T \quad c_N^T) \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = c^T \tilde{x} = \tilde{z}$$

y por el teorema de Dualidad Débil,  $\pi$  es óptimo.

b) Análogo.

c) Sabemos que (P) es no acotado. Supongamos entonces que existe  $\bar{y}$  tal que  $A^T \bar{y} \leq c$  (esto es la factibilidad del dual). Por el teorema de Dualidad Débil,  $b^T \bar{y} \leq c^T x, \forall x$  punto primal-factible. Esto dice que (P) es acotado. Contradicción.

d) Análogo. ■

Resumamos los resultados anteriores en el siguiente cuadro:

		Primal		
		$\tilde{z}$ finito	(P) no acotado	(P) infactible
Dual	$\tilde{\omega}$ finito	Sí	No	No
	(D) no acotado	No	No	Sí
	(D) infactible	No	Sí	Sí/No

**Ejercicio 4.1.2** Indique un ejemplo de un par primal-dual, en que ambos problemas sean infactibles.

**Teorema 4.1.4 (Holgura Complementaria)** Consideremos la pareja primal-dual

$$\begin{array}{ll} (P) \text{ mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \text{ máx } & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Si  $x^*$  e  $y^*$  son óptimos respectivos de (P) y (D), y  $s^* = c - A^T y^*$ , entonces  $x^{*T} s^* = 0$ .

**Demostración:** Por el teorema de dualidad fuerte  $c^T x^* = b^T y^*$ , luego

$$c^T x^* = b^T y^* = x^{*T} A^T y^* = x^{*T} (c - s^*) = x^{*T} c - x^{*T} s^*, \text{ lo que implica } x^{*T} s^* = 0. \quad \blacksquare$$

**Observación 4.1.2** La condición de holgura complementaria  $x^{*T} s^* = 0$  se puede cambiar en forma equivalente, por  $x_i^* s_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, n$ .

## 4.2. Interpretación económica de la dualidad

El dual de un problema lineal surge naturalmente de las condiciones de optimalidad del problema primal ( $P$ ) (condiciones como de Karush-Kuhn-Tucker).

Probaremos que si el problema primal tiene una interpretación económica, entonces también el dual y los valores óptimos de las variables duales pueden ser interpretados como precios.

Como ya vimos  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es una solución básica factible para un programa lineal en la forma estándar. Dado que  $x_B \geq 0$ , una pequeña perturbación del lado derecho  $\Delta b$  no provoca un cambio en la base óptima. Luego, cuando  $b$  es reemplazado por  $b + \Delta b$ , la nueva solución óptima se transforma en  $x' = \begin{pmatrix} x'_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(b + \Delta b) \\ 0 \end{pmatrix}$

y el valor óptimo de la función objetivo se perturba en

$$\Delta z = c_B^T B^{-1} \Delta b = \pi^{*T} \Delta b$$

donde  $\pi^* = B^{-T} c_B$  es el multiplicador del problema primal en el óptimo. Como probamos en el teorema de dualidad fuerte,  $\pi^*$  es la solución óptima del problema dual. Claramente,  $\pi_i^*$  puede verse como el precio marginal del  $i$ -ésimo recurso (es decir, el lado derecho  $b_i$ ), ya que da el cambio en el valor objetivo óptimo por unidad de incremento en ese recurso. Esta interpretación puede ser muy útil, pues indica la cantidad máxima que uno está dispuesto a pagar por aumentar la cantidad del  $i$ -ésimo recurso. Note que las condiciones de holgura complementaria implican que el precio marginal para un recurso es cero si tal recurso no fue completamente utilizado en el óptimo. Otros nombres dados a este precio en el óptimo son *precio sombra* y *precio de equilibrio*.

Estos precios sombras son útiles también para determinar cuando es conveniente agregar una nueva actividad.

Veamos ahora otra interpretación económica posible. Supongamos que estamos bajo competencia perfecta y un productor resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

es decir, desea maximizar las utilidades dadas por el vector de precios  $c$ , sujeto a las restricciones de capacidad de su firma. En el óptimo las restricciones no necesariamente se cumplen con igualdad, es decir podrían sobrar ciertas materias primas que se pueden vender en el mercado en un cierto precio, dado por el vector  $\lambda \geq 0$ . Entonces, lo que este productor resuelve es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Así, las utilidades de la firma están dadas por:

$$\varphi(\lambda) = \text{máx}\{\lambda^T b + (c - A^T \lambda)^T x, \quad x \geq 0\} = \lambda^T b + \text{máx}\{(c - A^T \lambda)^T x, \quad x \geq 0\}$$

Las posibles soluciones de este problema son dos:

- Si el vector  $(c - A^T \lambda)$  tiene todas sus componentes negativas, dado que el vector  $x$  es positivo, se tiene que el máximo es cero, y  $\varphi(\lambda) = \lambda^T b$ .
- Si el vector  $(c - A^T \lambda)$  tiene alguna coordenada positiva, entonces, por el mismo argumento, el subproblema de maximización es no acotado, luego  $\varphi(\lambda) = \infty$ .

Entonces se tiene

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} b^T \lambda & \text{si } (c - A^T \lambda) \leq 0, \lambda \geq 0 \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$

que es la utilidad del productor, en función de  $\lambda$ . Pero, el mercado, "que es cruel", asigna al productor el mínimo de utilidades, a través de la fijación de precios. Como conoce la situación de costos e infraestructura (suponiendo información completa), entonces resuelve:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & b^T \lambda \\ & A^T \lambda \geq c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

que es el problema dual asociado al inicial.

### 4.3. Dual de cualquier problema lineal

La tabla siguiente permite deducir fácilmente el dual de cualquier problema de Programación Lineal.

Prob. de minimización	Prob. de maximización
tipo de restricción	variable asociada
$\leq$	$\leq 0$
$\geq$	$\geq 0$
$=$	irrestricida
tipo de variable	restricción asociada
$\geq 0$	$\leq$
$\leq 0$	$\geq$
irrestricida	$=$

## 4.4. Algoritmo Simplex-dual

Supongamos que tenemos el siguiente cuadro *dual factible*, es decir, los costos reducidos son positivos, pero el lado derecho  $\bar{b}$  no es necesariamente positivo (la solución básica en curso no es positiva, luego no es factible). Entonces, consideramos:

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$  (condición de dual-factibilidad)
- $\bar{N} = B^{-1} N, \quad \bar{b} = B^{-1} b, \quad \bar{A} = [I, \bar{N}]$

0	$\bar{c}_N^T$	$-\bar{z}$
$I$	$\bar{N}$	$\bar{b}$

Los siguientes pasos resumen el Algoritmo Simplex-dual:

- (1) Si  $\bar{b} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$ , entonces la solución en curso es óptima. Si no, ir a (2).
- (2) Elegir cualquier  $r$  tal que  $\bar{b}_r < 0$ .
  - Si  $\bar{a}_{rj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$  entonces el problema *dual es no acotado*, es decir, el problema primal es infactible.
  - Si algún  $\bar{a}_{rj} < 0$ , pasar a (3).
- (3) Elegir la columna  $s$  tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\left\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} / \bar{a}_{rj} < 0\right\}$$

e ir a (4).

(4) Pivotear en la posición  $(r, s)$  y volver a (1).

## 4.5. Introducción al análisis post-optimal

Muchas veces, una vez resuelto el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

se desea examinar el comportamiento de la solución si se modifica alguno de sus parámetros. Algunos de estos cambios pueden ser:

- Variación en los coeficientes de la función objetivo.
- Variación en el vector de recursos.
- Introducción de una nueva variable.
- Introducción de una nueva restricción.

Puede suceder que nuestro problema sea muy complejo y no se desee resolver completamente de nuevo para analizar estos cambios, por ejemplo por problemas de tiempo. Las siguientes subsecciones examinan estos casos, sobre la base de ejemplos simples. El estudio del comportamiento de la solución de un problema lineal, como función de ciertos parámetros del problema, también se conoce como *análisis de sensibilidad*.

### 4.5.1. Variación en los coeficientes de la función objetivo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & -20x_1 - 16x_2 - 12x_3 \\ & x_1 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1600 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una solución inicial es  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  (notar que es un punto extremo del poliedro). El cuadro Simplex inicial es:

$$\begin{array}{cccccc|c} -20 & -16 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1600 \end{array}$$

Luego de pivotar, se llega al siguiente cuadro final:

$$\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base está compuesta por  $[x_3, x_2, x_4]$  y el valor óptimo es -14400. Qué sucede si nos informan que el coeficiente  $c_1$  vale -30 en lugar de -20?

Examinemos los costos reducidos (los demás elementos del cuadro, es decir,  $B^{-1}N$ ,  $B^{-1}b$ , y  $c_B^T B^{-1}b$  no sufren alteraciones, dado que  $c_1$  no participa en ellos). Tenemos que  $\bar{c}_5 = 8$  y

$$\bar{c}_6 = 4 \text{ no se modifican, y } \bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1}A_1 = -30 - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6.$$

Por esto, el cuadro final cambia a uno que no satisface optimalidad:

$$\begin{array}{cccccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

Por lo tanto se puede pivotar para mejorar la solución en curso, haciendo entrar  $x_1$  a la

base:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 & 14 & 1 & 15600 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 200 \end{array}$$

y la nueva solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base cambió a  $[x_1, x_2, x_4]$  y el valor mínimo cayó a -15600.

Qué sucede si  $c_1 = -20$  se modifica a  $c_1 = -20 + \theta$ ? Retomemos el asunto:

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} a_1 = (-20 + \theta) - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + \theta,$$

que es positivo cuando  $\theta \geq -4$ . Es decir, el rango para el coeficiente  $c_1$  con el que la base óptima  $[x_3, x_2, x_4]$  no cambie es  $c_1 \geq -24$ .

Veamos otro caso. Supongamos ahora que el coeficiente perturbado es  $c_2 = -16$  y pasa a ser  $-16 + \gamma$ . El vector de costos queda:

$$c = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 + \gamma \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que las tres primeras componentes de este vector corresponden a los costos estructurales y las últimas tres corresponden a las variables de holgura, y por lo tanto son cero. Examinemos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^T &= c_N^T - c_b^T B^{-1} N \\ &= (-20 \quad 0 \quad 0) - (-12 \quad -16 + \gamma \quad 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (4 \quad 8 + \gamma \quad 4 - \gamma) \end{aligned}$$

Estos costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir preservan la optimalidad, cuando:

$$-8 \leq \gamma \leq 4$$

o sea, la base  $[x_2, x_3, x_4]$  no cambia si:

$$-24 \leq c_2 \leq -12$$

En general, si el vector  $c$  cambia a  $\tilde{c}$  se debe evaluar  $\tilde{c}_N^T = \tilde{c}_N^T - \tilde{c}_B^T B^{-1} N$  y decidir:

- si  $\tilde{c}_N^T \geq 0$ , la base óptima no cambia y sólo hay que reevaluar  $\tilde{c}_B^T B^{-1} b = z^*$ .
- si  $\tilde{c}_N^T \not\geq 0$ , se itera con algoritmo Simplex.

#### 4.5.2. Variación en el vector de recursos (o lado derecho)

Tomemos el mismo ejemplo y supongamos que el vector  $b$  cambia a  $\tilde{b}$ . La base óptima para  $b$  es  $[x_3, x_2, x_4]$  entonces se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz  $B^{-1}$  es parte del cuadro final. Se tiene que:

- Si  $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$ , la solución en curso *aún es óptima*.
- Si  $B^{-1}\tilde{b} \not\geq 0$ , la solución no es factible (primal), pero los costos reducidos no han sufrido cambios, luego el cuadro final presenta una solución primal-infactible y dual-factible. Entonces se debe iterar con el algoritmo Simplex-dual.

Veamoslo con un ejemplo: supongamos que  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix}$ , por lo tanto:

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} \geq 0$$

Así, la base óptima no cambia, pero:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además,  $z^* = c_B^T B^{-1} \tilde{b} = (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = -14400$ .

Una pregunta interesante es: cuál es el rango para  $\tilde{b}$ , de modo que la base óptima no se modifique? Para ello, basta calcular:

$$B^{-1} \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}_2 - \tilde{b}_3 \\ -\tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De aquí se deduce que para que se cumpla la condición de optimalidad se debe tener:

$$\tilde{b}_1 \geq 0 \quad \tilde{b}_2 \leq \tilde{b}_3 \leq 2\tilde{b}_2$$

Notemos que que los datos originales satisfacen estas condiciones.

### 4.5.3. Introducción de una nueva actividad (o variable)

Supongamos que, en el ejemplo, se introduce la variable  $x_4$  con costo  $c_4 = -10$  y coeficientes  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en la matriz, es decir, el problema se transforma en:

$$\begin{array}{rcccccl} \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & -10x_4 & \\ & x_1 & & & +x_4 & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 1600 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

y el cuadro inicial es (incluyendo las variables de holgura):

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 -20 & -16 & -12 & -\mathbf{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\
 2 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1000 \\
 2 & 2 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 1600
 \end{array}$$

Si se realiza la misma secuencia de iteraciones para alcanzar la base óptima del problema original, el cuadro final es:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 4 & 0 & 0 & -\mathbf{6} & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & -\mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & 400 \\
 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 600 \\
 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 400
 \end{array}$$

Aquí, conviene observar que:  $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4$ , es decir,

$$\bar{c}_4 = -10 - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Además:

$$B^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basta agregar la columna correspondiente a la nueva variable en el cuadro final original. Esta columna es:

$$\begin{pmatrix} c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\ B^{-1} A_4 \end{pmatrix}$$

en que  $c_4$  es el costo de la variable nueva y  $A_4$  es el vector columna de dicha variable, en la matriz de restricciones.

En este caso, la nueva variable tiene costo reducido  $-6 < 0$ , y por lo tanto puede entrar a la base. Así el cuadro queda:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 10 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 4 & 16800 \\
 \hline
 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 800 \\
 -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 200 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400
 \end{array}$$

La nueva variable permite disminuir el costo total desde -14400 a -16800 siendo la solución final:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

**Observación 4.5.1** Podría la nueva variable producir no acotamiento? La respuesta es sí. La condición para ello es que  $B^{-1}A_4 \leq 0$ .

En el ejemplo, nos interesa calcular para qué valores del nuevo costo  $c_4$  la variable introducida es irrelevante en el óptimo (es decir, no pertenece a la base óptima). La condición para ello es que :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \geq 0 \quad \text{lo que implica} \quad c_4 \geq c_B^T B^{-1} A_4 = -4$$

#### 4.5.4. Introducción de una nueva restricción

Estamos tratando el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Cuyo cuadro óptimo, salvo reordenamiento, está dado por:

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Supongamos que se agrega la restricción:

$$d^T x \leq d_0$$

En que  $d \in \mathbb{R}^n$  y  $d_0 \in \mathbb{R}$ . Es decir, agregamos:

$$d^T x + x_{n+1} = d_0$$

Con  $x_{n+1}$  una variable de holgura. Así, el problema original se puede plantear como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N + 0x_{n+1} \\ & Bx_B + Nx_N + \vec{0} x_{n+1} = b \\ & d_B^T x_B + d_N^T x_N + x_{n+1} = d_0 \\ & x_B, x_N, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

en que  $d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$ . O bien, el nuevo problema es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (c^T \ 0) \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ & \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Agreguemos  $x_{n+1}$  a la base, es decir propongamos:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^T & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Cómo se modifica el cuadro final? Veamos término a término:

- $\tilde{c}_N^T = c_N^T - (c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ d_N^t \end{bmatrix} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$  (los costos reducidos no cambian)
- $\tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -d_B^T B^{-1}b + d_0 \end{pmatrix}$
- $(c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1}b.$

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	0	$-c_b^T B^{-1}b$
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$d_N^T - d_B^T B^{-1}N$	1	$d_0 - d_B^T B^{-1}b$

Luego,

- Si  $d_0 - d_B^T B^{-1}b \geq 0$ , la solución propuesta en los datos originales sigue siendo óptima, sólo que la holgura  $x_{n+1}$  entra a la base con valor  $d_0 - d_B^T B^{-1}b$ .
- Si  $d_0 - d_B^T B^{-1}b < 0$ , la solución propuesta *no es factible*, pues la holgura  $x_{n+1}$  toma un valor negativo. Iterar con algoritmo Simplex-dual, pivotando sobre la fila agregada. En este caso, si  $d_N^T - d_B^T B^{-1}N \geq 0$ , el problema (primal) es infactible, dado que el dual es no acotado.

Retomemos el problema del inicio:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & \\
 & x_1 & & & \leq 400 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 1600 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

Si se agrega la restricción:  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$ , es decir,

- $d_0 = 800$
- $d^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$

Entonces,

- $d_B^T = (1 \ 1 \ 0) \quad [x_3, x_2, x_4]$
- $d_N^T = (1 \ 0 \ 0) \quad [x_1, x_5, x_6]$
- $d_N^T - d_B^T B^{-1}N = (1 \ 0 \ 0) - (1 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1 \ -1 \ 0)$

$$\blacksquare d_0 - d_B^T B^{-1}b = 800 - (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = -200$$

El cuadro óptimo del problema original,

$$\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

se transforma en (agregando una fila y una columna):

$$\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & \mathbf{0} & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \mathbf{0} & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 400 \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{200} \end{array}$$

Al pivotar con Simplex-dual, la última variable sale de la base (entra la primera) generando un nuevo cuadro óptimo y una nueva solución:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \mathbf{4} & 14000 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \mathbf{1} & 200 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{200} \end{array}$$

de modo que  $x^* = (200 \ 600 \ 0 \ 200 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  y  $z^* = -14000$ .

# Capítulo 5

## Modelos y algoritmos para flujos en redes

Esta área de la Optimización es muy importante ya que existen muchos problemas de estructura particular que se pueden expresar mediante la noción de grafo o red. Muchos de estos problemas ya estaban planteados y concitaban el interés de los matemáticos e ingenieros antes de la aparición formal de la Programación Lineal.

### 5.1. Motivación y descripción de problemas clásicos

En este capítulo introduciremos el problema de flujo de costo mínimo (FCM), a través de cuatro problemas específicos que son casos particulares de él:

- a) Problema de asignación
- b) Problema de transporte
- c) Problema de flujo máximo
- d) Problema del camino más corto

**Definición 5.1.1** Un **grafo** es un par  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{N}$  es un conjunto finito y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ . A los elementos en  $\mathcal{N}$  se les llama **nodos** y a los pares ordenados en  $\mathcal{A}$  se les llama **arcos**.

Notemos que los arcos son *dirigidos*, es decir, el par  $(i, j) \in \mathcal{A}$  es distinguible del par  $(j, i) \in \mathcal{A}$ , que representa un arco en el sentido contrario. En el grafo de la figura la cantidad

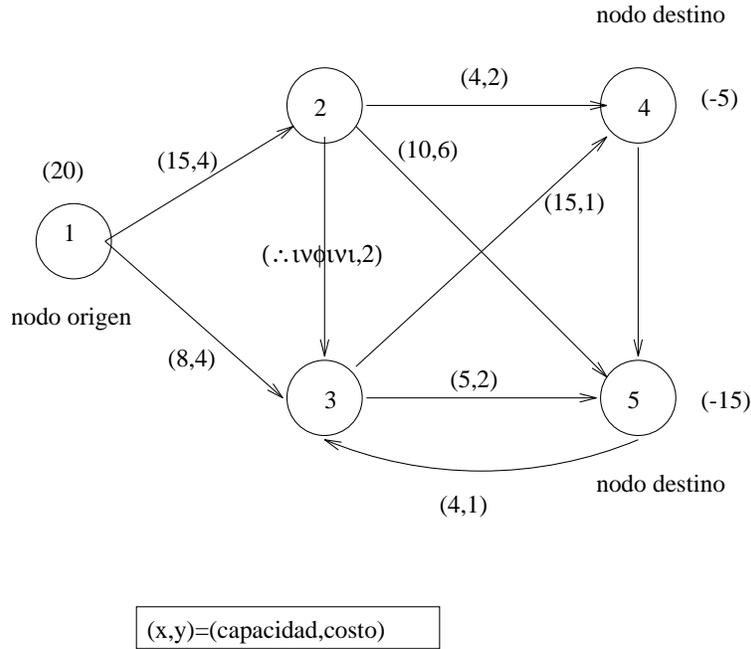


Figura 5.1: Ejemplo de un grafo

entre paréntesis ( $b$ ) representa la oferta en cada nodo (si  $b \geq 0$  el nodo **ofrece** la cantidad  $b$ , si  $b \leq 0$  el nodo **demanda** la cantidad  $b$ ). La notación  $(u, c)$  indica la capacidad del arco ( $u$ ) y el costo unitario del arco ( $c$ ).

El problema general corresponde a encontrar un flujo factible, de costo mínimo: si  $x_{ij}$  es la cantidad enviada de  $i$  a  $j$ , entonces el problema es:

$$\begin{aligned}
 (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

La primera restricción dice que la oferta en el nodo  $i$  es igual a lo que entrega, menos lo que recibe. La segunda, que el flujo sobre un arco debe respetar entre las cotas del mismo.

Los datos de un grafo se pueden resumir en una matriz  $A = (a_{pq})$ , cuyas filas son los

nodos del grafo y cuyas columnas son los arcos, de manera que  $\forall p \in \mathcal{N}, q \in \mathcal{A}$ .

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } q \text{ sale del nodo } p \\ -1 & \text{si el arco } q \text{ llega al nodo } p \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notemos que cada arco aparece sólo en dos restricciones ya que un arco participa solamente en dos nodos, en uno como arco entrante y en otro como arco saliente. Cabe destacar que la matriz  $A$  resultante es de rango incompleto (igual a  $n - 1$ , en que  $n$  es la cardinalidad de  $\mathcal{N}$ ). En efecto, la suma de las filas es cero, es decir son linealmente dependientes. Como haremos en lo que sigue el supuesto (esencial en todo este capítulo) que

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0,$$

es decir que la oferta iguala a la demanda, entonces el sistema de ecuaciones del problema ( $FCM$ ) tiene una ecuación redundante. En todo caso, ese supuesto no hace perder generalidad al tratamiento de los problemas que veremos más adelante.

Así, el problema general de flujo de costo mínimo puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ & Ax = b \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Los datos del problema del ejemplo de la figura pueden entonces resumirse en la siguiente tabla:

nodo/costo	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{45}$	$x_{53}$	oferta
1	4	4	2	2	6	1	3	2	1	20
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	-1	-1	0	0	1	1	0	-1	0
5	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-5
capacidad	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	1	-15
	15	8	$\infty$	4	10	15	15	$\infty$	4	

En lo que sigue del capítulo describiremos los 4 problemas antes mencionados, para luego entregar un método de resolución del problema de transporte y su generalización al problema más general ( $FCM$ ).

### 5.1.1. Problema de asignación

Supongamos que el gerente de algún gran supermercado, que consta de 50 cajas, desean saber cómo asignar 50 cajeras a estas cajas, de manera que el rendimiento sea el mejor posible (medido según algún criterio). Si hiciéramos esta asignación probando cada configuración de cajeras y cajas, entonces el tiempo para encontrar la mejor sería simplemente prohibitivo, aún para los computadores más rápidos disponibles. Un buen ejercicio para mejor comprender esta complejidad es estimar el tiempo de ejecución si el computador pudiese realizar un millón de estas evaluaciones por segundo, sabiendo que son  $50!$  configuraciones a evaluar. Es aquí donde entra a jugar un papel importante la Programación Lineal, como una forma científica de eliminar muchos millones de configuraciones mediante simples criterios de comparación y una sucesión de cálculos relativamente más sencillos.

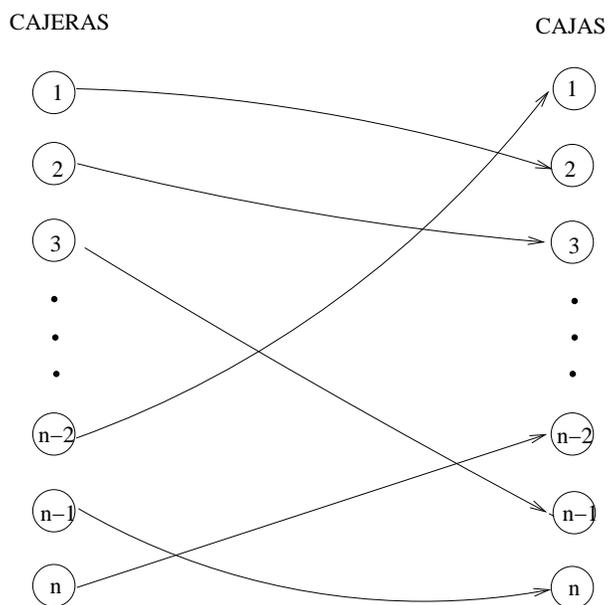


Figura 5.2: Problema de Asignación

Las variables en este caso son:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al nodo (cajera) } i \text{ le corresponde el nodo (caja) } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Este problema se escribe:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (\text{a cada cajera, una sola caja}) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (\text{a cada caja, una sola cajera}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Los coeficientes  $c_{ij}$  representan los rendimientos de las cajeras en cada caja y la función objetivo persigue maximizar el rendimiento total.

Este problema de asignación es claramente un caso particular del problema (*FCM*) planteado al inicio del capítulo. En este caso, los nodos-cajera tienen oferta igual a 1 (pueden realizar un servicio) y los nodos-caja tienen demanda igual a 1 (solicitan ser servidos por una cajera). Los nodos-cajera no tienen arcos entrantes pues no demandan y, similarmente, los nodos-caja no tienen arcos salientes, pues no ofrecen. Las variables son enteras, con cotas 0 y 1.

### 5.1.2. Problema de transporte

Consideremos un grafo con un conjunto de  $m$  nodos de partida, con ofertas  $a_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$  y  $n$  nodos de llegada con demandas  $b_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$ . Cada arco tiene asociado un costo unitario de transporte  $c_{ij}$ .

Supongamos, por ahora, que  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , aunque si esta hipótesis no se cumple, el problema tiene sentido de todas maneras, pero debemos interpretarlo de manera ligeramente diferente.

Se conoce el problema de transporte como el de minimización de los costos de transporte de los flujos, de manera de satisfacer la demanda en cada nodo de llegada, sujeto a restricciones en la oferta de cada nodo de partida.

Podemos notar que el problema de asignación es un caso particular del problema de transporte, donde cada oferta y cada demanda consta de una sola unidad.

El problema de transporte se escribe:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{oferta}) \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{demanda}) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

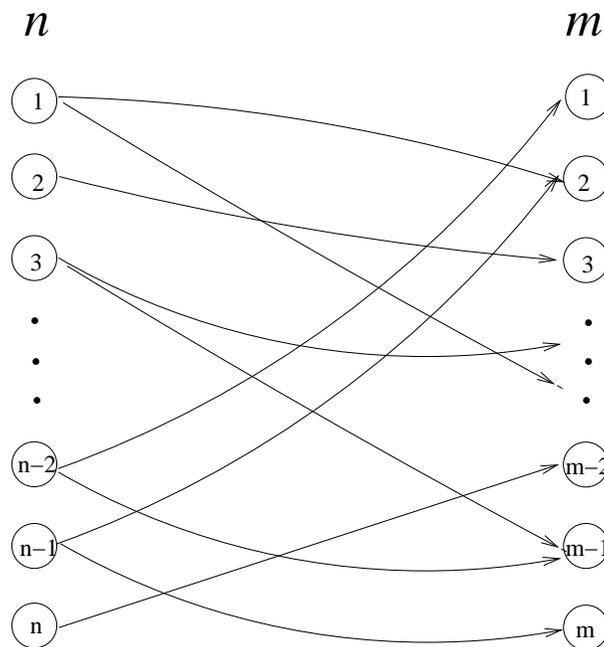


Figura 5.3: Ejemplo de un problema de transporte

Las restricciones quedan definidas de esa forma ya que, para los nodos-origen, las ecuaciones son del tipo (flujo saliente menos flujo entrante, igual a la demanda):

$$\sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ki} = a_i,$$

y en este caso

$$\sum_{k/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ki} = 0$$

Análogamente, en el caso de la demanda se tiene que

$$\sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ki} = -b_j$$

y

$$\sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} = 0.$$

### 5.1.3. Problema de flujo máximo

Este problema es el de determinar el flujo maximal posible de un nodo origen o fuente ( $s$ ) dado a un nodo destino o sumidero ( $t$ ) con restricciones de capacidad en los arcos.

Si denotamos  $v$  al flujo correspondiente a transportar la cantidad final en  $t$ , desde  $t$  a  $s$ , notaremos que  $\max v$  es equivalente a maximizar el flujo total transportado por el resto del grafo ya que dado que todo lo que sale de  $s$  llega  $t$ , entonces en el sistema se mantiene un equilibrio que permite que los problemas sean análogos.

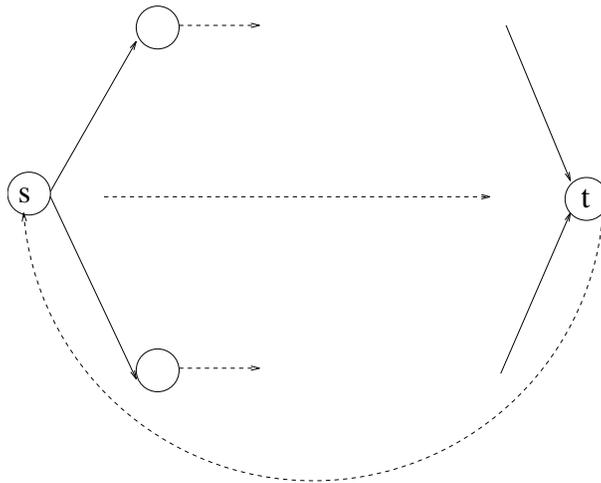


Figura 5.4: Problema de flujo máximo

Luego, el problema se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \text{máx} && v \\
 \text{s.a.} & && \sum_j x_{sj} - \sum_k x_{ks} - v = 0 \quad \text{sale de } s \\
 & && \sum_j x_{tj} - \sum_k x_{kt} + v = 0 \quad \text{llega a } s \\
 & && \sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{k \in N} x_{ki} = 0 \quad i \neq s, t \quad (\text{balance entre nodos intermedios}) \\
 & && 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \cup \{(t, s)\}
 \end{aligned}$$

notemos que el problema original es de la forma  $\min(-v)$  donde el problema es de flujo de costo mínimo, en el cual el vector  $c$  es de la forma  $c^T = (-1, 0, \dots, 0)$ .

#### 5.1.4. Problema de camino más corto

Este problema tiene como objetivo encontrar el camino más corto entre el nodo  $s$  y el nodo  $t$  en un grafo dado, es decir, una secuencia de arcos dirigidos y adyacentes entre  $s$  y  $t$ . La longitud del arco puede ser expresada en términos de costo, tiempo, distancia, etc. El problema del camino más corto se caracteriza por el siguiente gráfico:

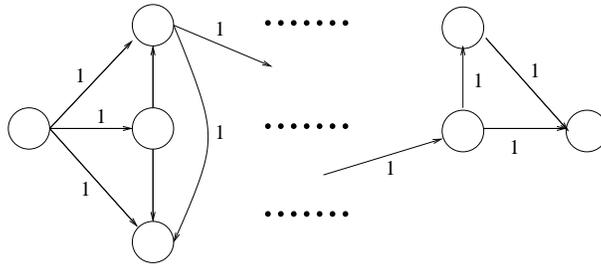


Figura 5.5: Ejemplo problema camino más corto

El problema se escribe

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} &&& \sum_{j/(i,j) \in A} x_{sj} = 1 && \text{(ofrece una unidad)} \\
&&& - \sum_{k \in N} x_{kt} = -1 && \text{(demanda una unidad)} \\
&&& \sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{k \in N} x_{ki} = 0 \quad i \neq s, t && \text{(balance entre nodos intermedios)} \\
&&& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A
\end{aligned}$$

## 5.2. Solución del problema de transporte

### 5.2.1. Solución básica factible inicial (Fase I)

El proceso de saturación es, en realidad, la búsqueda de una solución básica factible del sistema, es decir, la determinación de una base factible.

**Definición 5.2.1** *Un árbol es un grafo conexo, es decir, existe una cadena entre dos nodos cualesquiera (todos los nodos están conectados por una secuencia de arcos, sin considerar la orientación), que no contiene ciclos, es decir, partiendo de un nodo no se puede volver a él por una secuencia de arcos adyacentes (sin importar la dirección de los arcos).*

**Procedimiento de saturación:** Sea  $m + n$  el número de arcos del grafo. En la solución factible deberán haber  $m + n - 1$  arcos con flujos positivos en la solución (los demás están en cero, es decir,  $mn - (m + n - 1)$  arcos nulos)

El método de saturación empieza cuando se satura el primer arco (elegido arbitrariamente), esto es, se elige un arco al cual se le asigna el máximo flujo posible, satisfaciendo así la demanda de los nodos demandantes, luego se prosigue de la misma manera con el resto de los arcos, hasta satisfacer la demanda de todos los nodos.

El sistema de ecuaciones del problema de transporte tiene  $m + n$  ecuaciones, pero recordemos que una es redundante. Luego, cuando saturamos en orden arbitrario, la solución propuesta es básica.

Las bases del problema de transporte son **árboles**.

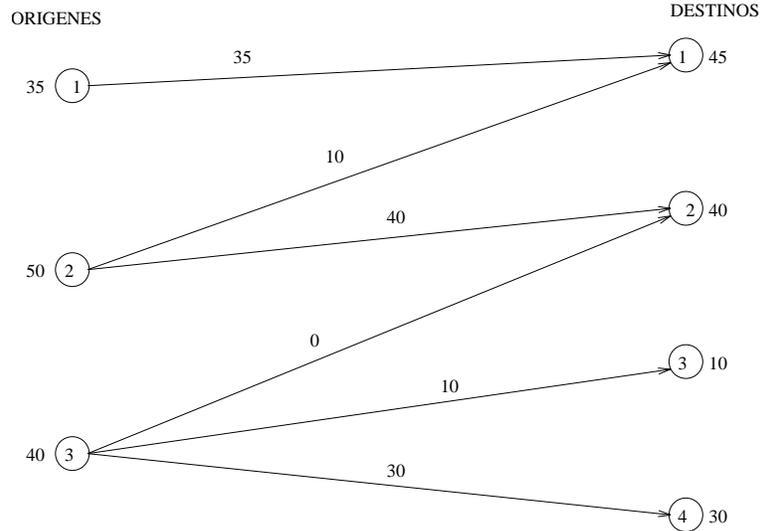


Figura 5.6: Procedimiento de saturación

**Procedimiento de saturación a Costo Mínimo** Ahora saturemos guiados por el costo mínimo, es decir, comenzamos saturando desde el arco que posee el menor costo al de mayor costo. Este procedimiento también produce un árbol (solución básica factible).

**Observación 5.2.1** Si los datos  $a_i, b_j$  son enteros, entonces los flujos  $x_{ij}$  son enteros (de acuerdo a los procedimientos que hemos descrito), pues se trata de diferencias de números enteros (dados por la oferta y demanda en cuestión). Esto muestra que todos los puntos extremos del problema de transporte con datos enteros, tienen coordenadas enteras.

### 5.2.2. Mejoramiento de una solución en curso (Fase II)

En esta etapa se supone ya conocida una solución básica factible, a partir de la cual se construye el problema dual del original y se procede según se explica a continuación.

Recordemos que este problema de transporte (P) y su dual (D) son de la forma

$$\begin{array}{ll}
 (P) & \text{mín } c^T x \\
 & Sx = b \\
 & x_{ij} \geq 0 \\
 (D) & \text{máx } b^T y \\
 & S^T y \leq c
 \end{array}$$

El dual del problema de transporte está dado por:

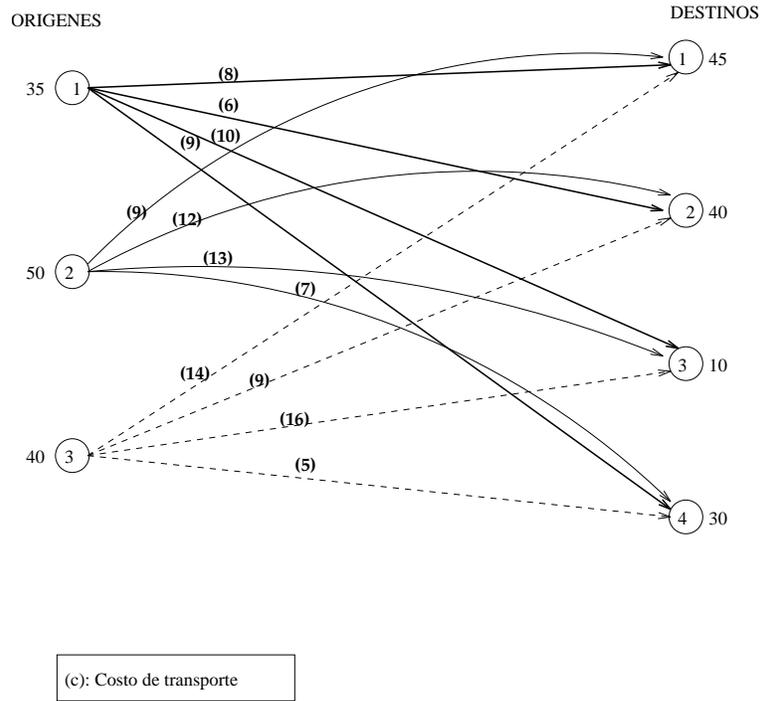


Figura 5.7: Procedimiento de saturación a costo mínimo

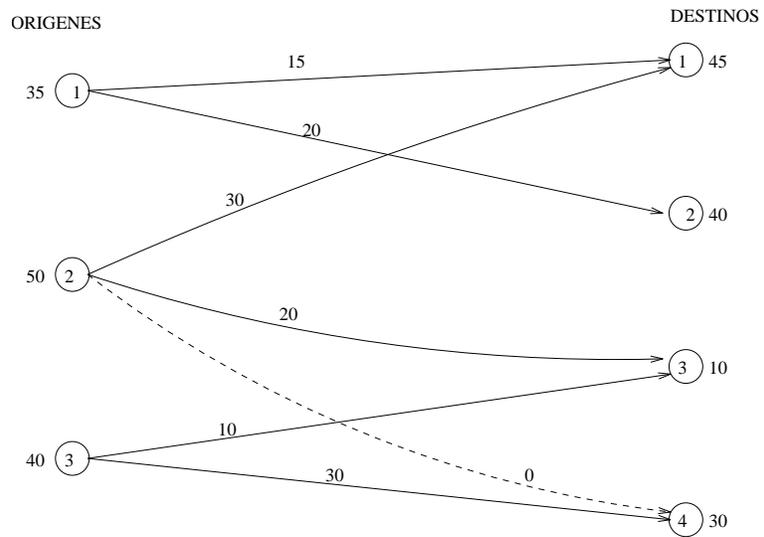


Figura 5.8: Base factible

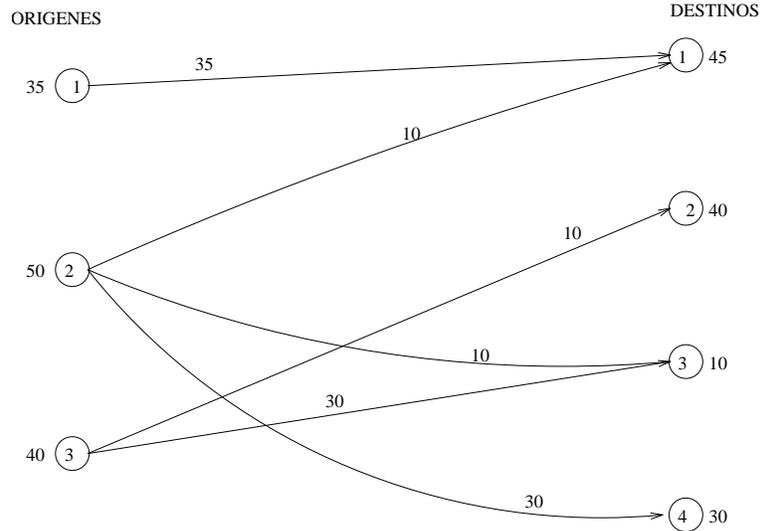


Figura 5.9: Nueva base factible

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j \\ & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j \\ & u_i, v_j \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos una solución básica factible. Los costos reducidos para las variables básicas son

$$(\alpha) \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son

$$(\beta) \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Los  $u_i$  corresponden a los nodos de oferta y los  $v_j$  a los de demanda.

El conjunto de ecuaciones  $(\alpha)$  representa un sistema de  $m + n - 1$  ecuaciones y  $m + n$  incógnitas, de rango  $m + n - 1$ . Entonces podemos fijar una variable dual en un valor arbitrario y usar  $(\alpha)$  para encontrar todas las restantes variables duales.

Usemos las ecuaciones  $(\beta)$  para determinar los costos reducidos de los demás arcos (no básicos)

Se ingresa a la base un arco de costo reducido negativo. Si todos los costos reducidos son positivos, llegamos al óptimo.

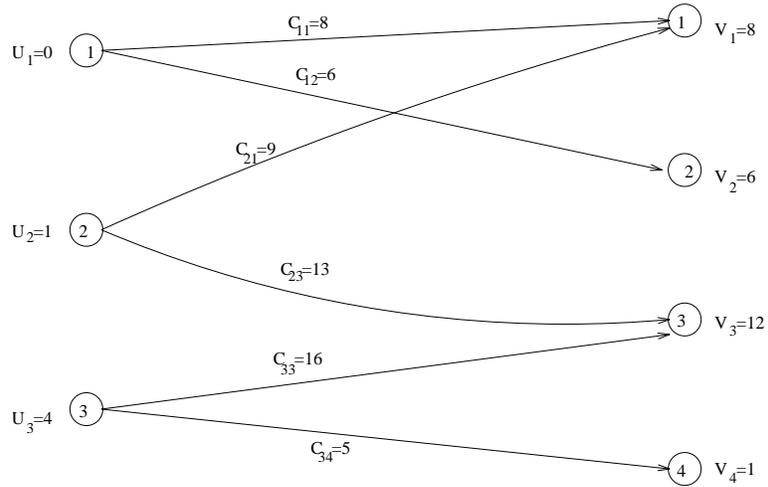


Figura 5.10:

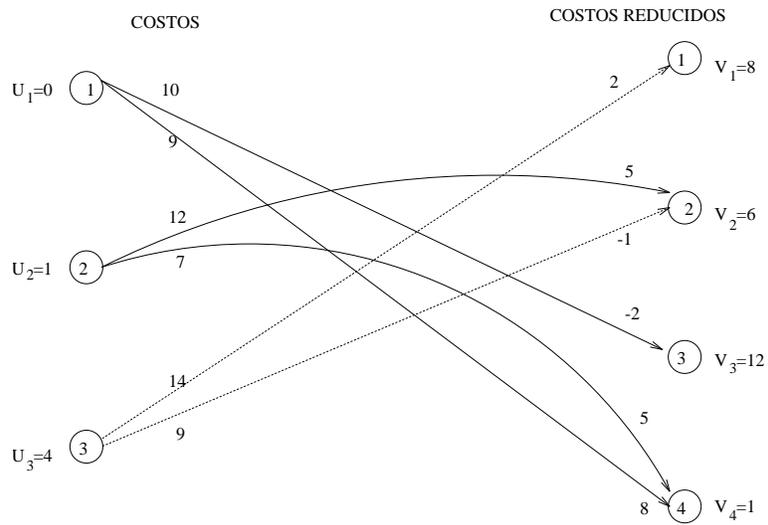


Figura 5.11:

En el caso del ejemplo, elegimos el arco  $(1,3)$

Si se agrega un arco  $(i, j)$  al conjunto de arcos básicos, se genera un ciclo en el grafo.

Se asigna un flujo  $\lambda \geq 0$  a ese arco. Los flujos son positivos.

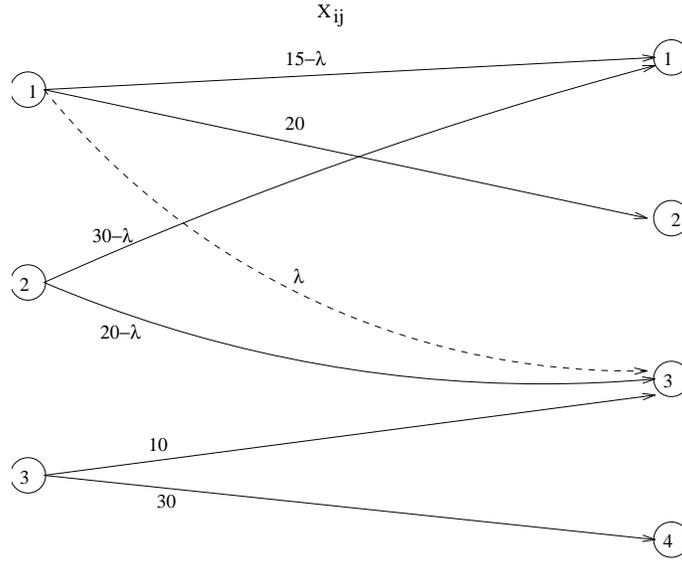


Figura 5.12:

$$\left. \begin{array}{l} 15 - \lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \\ 30 + \lambda \geq 0 \\ 20 - \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \implies 0 \leq \lambda \leq 15$$

Se elije el máximo  $\lambda$  posible y el arco que se anula sale de la base.

En este caso,  $\lambda = 15$  y el arco (1,1) sale de la base. Notar que las modificaciones sólo afectan al ciclo.

Reiterar hasta que todos los costos reducidos sean positivos.

**Ejercicio 5.2.1** Resolver el problema de transporte para los datos

$$a = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 11 \\ 12 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

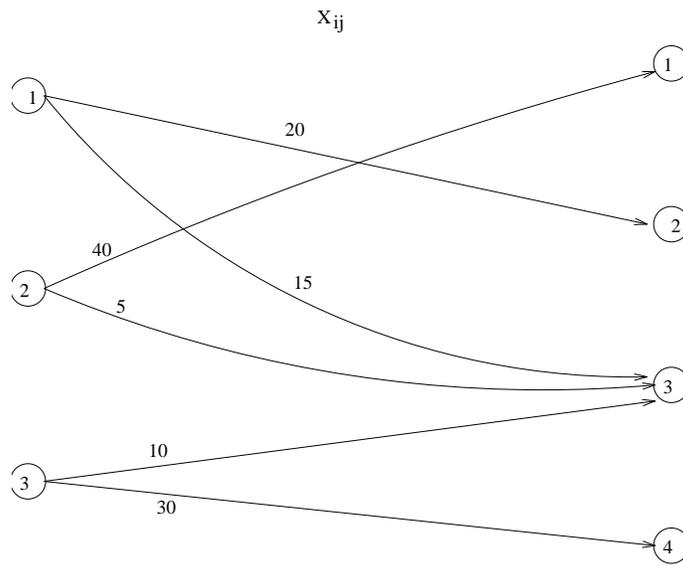


Figura 5.13:

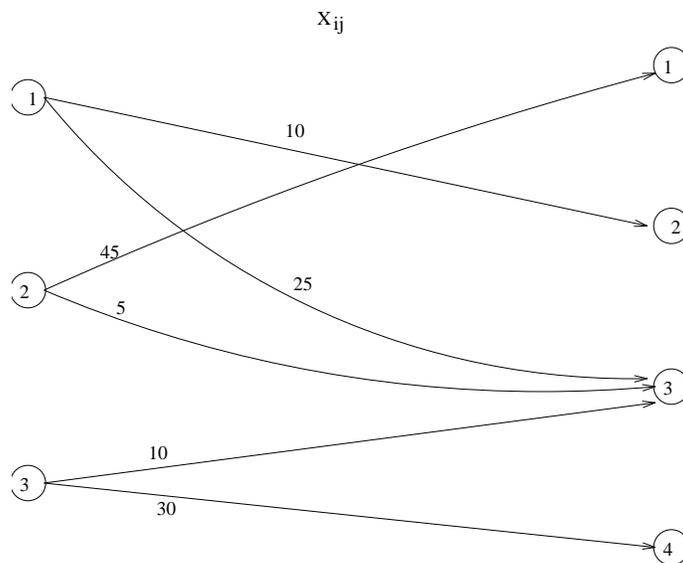


Figura 5.14:

### 5.3. Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso (Fase II)

Si  $n$  es el número de nodos de la red y  $m$  el número de arcos, la matriz de incidencia del grafo es de  $n \times m$  y las bases están compuestas por  $n - 1$  arcos.

No hay un método fácil para encontrar soluciones básicas factibles, por lo tanto, es necesario usar Fase I de simplex.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Si tenemos la siguiente base  $\{(1, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ . Los arcos  $(1, 3)$  y  $(3, 5)$  no son básicas, pero tampoco son nulas (se debe extender el concepto de base).

**Extensión del concepto de base** Una variable no básica es fijada en alguna de sus cotas. Las variables básicas se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones (respetando sus cotas)

Consideremos el problema escrito en la forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

donde  $l, u \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  de rango completo (si es necesario, eliminando filas)

Tomemos la partición  $A = [B, N]$  y supongamos que  $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$  donde  $[x_N]_j = l_j \vee u_j$

Se dice que  $x_B$  es la base si y solamente si  $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$  ( $\neq 0$  en este caso).

$[x_B]_j$  debe satisfacer  $l_j \leq [x_B]_j \leq u_j$

En el caso del ejemplo,  $(2, 3)$  y  $(\infty, 2)$  son no básicas y están en su cota inferior, cero en este caso.

Para el problema de transporte, la degenerancia se traduce en que un arco básico esté en alguna de sus cotas.

Veamos el cuadro resumen del problema planteado:

Restricciones: sale-entra=oferta

	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{45}$	$x_{53}$		$\downarrow$ var.duales
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	20	$\pi_1$
2	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	$\pi_2$
3	0	-1	-1	0	0	1	1	0	-1	0	$\pi_3$
4	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-5	$\pi_4$
5	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	1	-15	$\pi_5$

La fórmula general de un costo reducido es  $\bar{c}^T = c^T - \pi^T N$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

Condición de optimalidad:

$$\bar{c}_{ij} \geq 0 \quad \text{si } l_{ij} = x_{ij} \text{ (cota inferior)}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \quad \text{si } l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} \leq 0 \quad \text{si } x_{ij} = u_{ij} \text{ (cota superior)}$$

Las ecuaciones  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0$  para las variables básicas, permiten determinar los valores de las variables duales. Dado que hay  $n$  nodos y  $n - 1$  arcos básicos, basta fijar arbitrariamente el valor de una variable dual.

Para el caso del ejemplo, fijemos  $\pi_2 = 0$

$$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = 4$$

Así se obtiene que  $\pi = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

Luego, se calculan los costos reducidos de los arcos no básicos:  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$

Para el ejemplo:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{13} &= c_{13} - (\pi_1 - \pi_3) = 4 - 4 - 1 = -1 \\ \bar{c}_{23} &= c_{23} - (\pi_2 - \pi_3) = 2 - 0 - 1 = 1 \\ \bar{c}_{35} &= c_{35} - (\pi_3 - \pi_5) = 3 + 1 - 6 = -2 \\ \bar{c}_{45} &= c_{45} - (\pi_4 - \pi_5) = 2 + 2 - 6 = -2 \\ \bar{c}_{53} &= c_{53} - (\pi_5 - \pi_3) = 1 + 6 - 1 = 6 \end{aligned}$$

**Regla de entrada a la base** Son candidatos para ingresar a la base los siguientes arcos:

- a) Un arco de costo reducido negativo que está en su cota inferior.
- b) Un arco de costo reducido positivo que está en su cota superior.

Con cada nuevo grafo se tiene una nueva base. Se recalculan las variables duales y los costos reducidos, para llegar al óptimo.

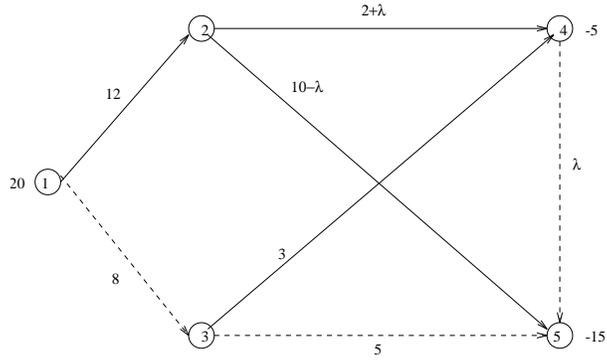


Figura 5.15: primero

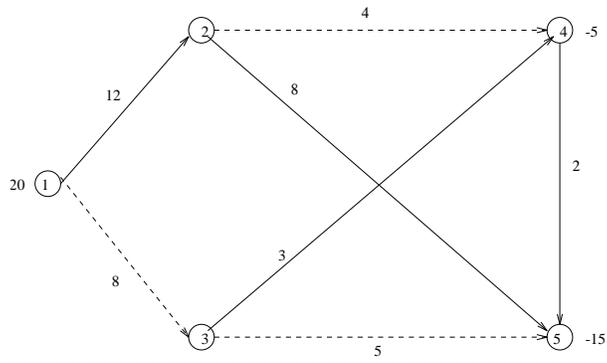


Figura 5.16: segundo

**Observación 5.3.1** *Se asume que los arcos que no se dibujan están en cero.*