Auxiliar 2: Optimización

Profesor : Alejandro Jofré
Auxiliares : Nicolas Hernández & Emilio Vilches
7 de Agosto de 2009

1. Condiciones necesarias para restricciones de igualdad

Sean $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ funciones continuamente diferenciables. Considere el problema

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{mín}\, f(x) \\ \text{s.a. } \; h_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Teorema 1. Sea x^* un mínimo local de $(\mathcal{P})$ y supongamos que $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ son linealmente independientes. Entonces existe un único vector $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, llamado *vector multiplicador de Lagrange*, tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \tag{1}$$

Si además f y $h_1, \ldots, h_m$ son dos veces continuamente diferenciables, se tiene

$$y^t \left(\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) \right) y \geq 0, \quad \forall y \in V(x^*) \tag{2}$$

donde $V(x^*)$ es el subespacio

$$V(x^*) = \{y\colon\ \nabla h_i(x^*) y = 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

2. Problemas

Problema 1.
Considere una matriz simétrica Q de $n \times n$. Definamos

$$\lambda_1 = \min_{\|x\|^2 = 1} x^t Q x, \qquad e_1 = \arg \min_{\|x\|^2 = 1} x^t Q x,$$

y para $k = 0, \ldots, n-1$

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{\|x\|^2 = 1 \\ e_i^t x = 0,\, i = 1, \ldots, k}} x^t Q x, \qquad e_{k+1} = \arg \min_{\substack{\|x\|^2 = 1 \\ e_i^t x = 0,\, i = 1, \ldots, k}} x^t Q x,$$

1. Mostrar que
$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$
2. Mostrar que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente independientes.
3. Mostrar que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de Q y que $e_1, \ldots, e_n$ son los correspondientes vectores propios.

Problema 2 (Desigualdad de la media aritmética-geométrica).
Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ numeros positivos tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ &\text{s.a. } \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = 1 \qquad x_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Demuestre la Desigualdad de la media aritmética-geométrica

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

para un conjunto de numero positivos x_i, $i = 1, \ldots, n$.
Indicación: Use el cambio de variables $y_i = \ln(x_i)$.

Problema 3.
Mostrar que los ángulos x, y, y z de un triángulo maximizan $\sin x \sin y \sin z$ si y sólo si el triángulo es equilátero.

3. Ejercicios

Ejercicio 1.
Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Considere el problema

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|^2 \\ \text{s.a. } \|x\|^2 = 1. \end{array}$$

Considere el centro de gravedad $\hat{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_j$ de los vectores $a_1, \ldots, a_m$. Mostrar que si $\hat{a} \neq 0$, el problema tiene un único máximo y un único mínimo.

Ejercicio 2.
Mostrar que entre todos los triángulos circunscritos a un círculo, el único que posee área mínima es el equilátero.
Indicación: Sean x, y, y z los largos de las líneas tangentes desde los vértices de el triángulo al el círculo, y sea ρ el radio del círculo. El área de el triángulo es $A = \rho(x + y + z)$, y ésta puede ser expresada como $A = \sqrt{xyz(x + y + z)}$(Un teorema debido a Heron de Alejandría). Considere el problema

$$\begin{array}{l} \min x + y + z \\ \text{s.a. } xyz = \rho^2(x + y + z). \end{array}$$

Ejercicio 3.
Considere el círculo unitario y dos puntos a y b en el plano. Encontrar un punto x sobre el círculo tal que el triángulo con vertices a, b, y x tenga área máxima. Considere el problema

$$\begin{array}{l} \max \|x - \hat{x}\|^2 \\ \text{s.a. } \|x\|^2 = 1. \end{array}$$

donde $\hat{x}$ es la proyección de x sobre la recta que pasa por a y b. Mostrar que la línea que conecta x y $\hat{x}$ pasa a través del centro del círculo.

Ejercicio 4.
Mostrar que entre todos los triángulos inscritos en un círculo dado, el único que posee área máxima es el equilátero. *Indicación:* Use el ejercicio anterior.