Problemas de programación lineal.

1. Una granja necesita al día 100 unidades de un pienso compuesto de manera que debe contener al menos el 0.8% y a lo sumo el 1.2% de calcio, al menos el 22% de proteinas y a lo sumo el 5% de fibras.

   Este pienso se va a obtener a partir de tres componentes básicos (maiz, soja y carbonato) cuyos contenidos unitarios (por unidad) de los distintos componentes y costes unitarios son:

	Calcio	Proteinas	Fibras	Costo/Kg.
Maiz	0.001	0.09	0.02	64
Soja	0.002	0.5	0.08	180
Carbonato	0.38	0	0	28

   Determinar la composición óptima (de coste total mínimo) de la mezcla

2. Una fábrica produce dos tipos de sombreros. Cada sombrero del primer tipo requiere el doble de tiempo de mano de obra que el segundo tipo. Si todos los sombreros fabricados en un día fuesen sólo del segundo tipo, la compañía dispone de tiempo como para producir un total de 500. El mercado limita las ventas diarias del primero y segundo tipos a 150 y 250 sombreros. Suponer que los beneficios por sombrero son de 8 euros para el tipo I y de 5 euros para el tipo II. Determinar el número de sombreros de cada tipo que maximice el beneficio.

3. Suponga que el número mínimo de autobuses requerido en la i-ésima hora del día es b_i, $i = 1, 2, ..., 24$. Cada autobús trabaja 6 horas consecutivas. Si el número de autobuses en el período i excede el mínimo requerido b_i, se incurre en un coste por exceso, c_i, por autobús-hora. Determinar el número óptimo (de coste mínimo) de autobuses que deben empezar a circular en cada una de las 24 horas.

4. Una empresa tiene planificada la elaboración de dos productos A y B para los dos próximos semestres. Las especificaciones de la demanda de ambos productos así como la capacidad de trabajo y el coste de elaboración se indican en la tabla siguiente:

	Unidades demandadas		Tiempo requerido		Coste por horas	
Producto	Semestre 1	Semestre 2	Regular	Extra.	Regular	Extra.
A	750	1500	1	1	30	45
B	250	600	1.5	1.5	20	30

   Además las horas de trabajo de que dispone la empresa durante ambos períodos son 1800 que se pueden incrementar hasta 2550 haciendo horas extraordinarias. Las unidades no vendidas se almacenan en la planta con un coste de 2 unidades monetarias en el primer semestre y de 1.5 en el segundo semestre. Inicialmente se supone que no hay unidades en el inventario.

   Formular un problema de programación lineal para determinar el plan de fabricación óptimo (de coste mínimo).

5. Un importador de Whisky dispone de un mercado ilimitado, pero la reglamentación mensual de aduanas sobre importación supone las siguientes restricciones para tres tipos de whisky (W1,W2 y W3):

Tipos de Whisky	nº máximo de litros	Costo/litro
W1	2000	350 pts.
W2	2500	250 pts.
W3	1200	200 pts.

Con estos tres tipos de whisky realiza tres mezclas diferentes cuyas características vienen detalladas en la tabla siguiente:

Mezcla	Precio venta por litro	Composición Mínimo	Composición Máximo
M1	340 pts.	60% W1	20% W3
M2	285 pts.	15% W1	60% W3
M3	225 pts.	50% W3	-

Determinar el plan de fabricación óptimo (de coste total mínimo) para los tres tipos de mezclas.

6. Una refinería obtiene tres tipos de fuel, F_1, F_2 y F_3, mezclando adecuadamente tipos diferentes de gasolina cruda, C_1, C_2, C_3 y C_4, que produce.

   Vende al exterior los tipos de fuel así como la gasolina cruda que no utiliza para la producción de los fueles.

   Los datos disponibles son los siguientes:

Gasolina Cruda	Calidad (octanos/barril)	Producción (barriles/día)	Coste (x 1000ptas/barril)
C_1	68	4000	1.02
C_2	86	5050	1.15
C_3	91	7100	1.35
C_4	99	4300	2.75

Fuel	Calidad mínima (octanos/barril)	Precio de venta (x1000ptas/barril)	Demanda (nº barriles)
F_1	95	5.15	10000/día a lo sumo
F_2	90	3.95	sin límite
F_3	85	2.99	15000/día al menos

   La gasolina cruda la puede vender a 2.95 (x1000ptas) el barril si el octanolaje es mayor o igual que 90 y a 1.85 si es menor de 90. Plantear un problema de programación lineal para determinar el número de barriles que deben fabricarse de cada tipo de fuel para que se maximice el beneficio total por ventas.

7. Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de pollos una dieta mínima para la alimentación de las aves compuesta de 3 uds. de hierro y 4 uds. de vitaminas. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2.5 uds. de hierro y 1 ud. de vitaminas, cada kilo de harina de pescado 3 uds. de vitaminas y cada kilo de cierto pienso sintético 1 ud. de hierro y 2 uds. de vitaminas.

   El granjero se pregunta por la composición de la dieta óptima que minimice el costo de la alimentación, sabiendo que los precios del maíz, harina de pescado y pienso sintético son de 20, 30 y 16 ptas. respectivamente.

   Comprobar si la solución sigue siendo válida en los siguientes casos:

- El precio del kilo de maíz pasa de 20 a 25 ptas.
- El precio del kilo de harina de pescado se reduce a 20 ptas.
- El precio del kilo de pienso sube hasta las 20 ptas.
- Aparece otro tipo de alimento cuyo precio es de 25 ptas. y cuya composición es 2 uds. de hierro y 2 uds. de vitaminas.
- Se hace necesario introducir un nuevo componente alimenticio de manera que las aves consuman por lo menos una unidad. En cada kilo de los alimentos (maíz, harina de pescado y pienso) se encuentra una unidad del nuevo componente.
- La cantidad mínima de hierro se amplía a 5 unidades.
- Las aves precisan consumir por lo menos 5 uds. de vitaminas.
- Se presenta una variedad de maíz que en cada kilo contiene 3 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que sigue costando 20 ptas./kilo.

8. La empresa "A"se dedica al montaje de motocicletas de 500, 250, 125 y 50 centímetros cúbicos. Posee una planta que está estructurada en cuatro departamentos: fabricación de chasis, pintura, montaje y el departamento de O.K.-line o verificación de calidad.

   Las horas de mano de obra que necesita cada uno de los modelos de motocicletas en los diferentes departamentos son los siguientes:

	Chasis	Pintura	Montaje	O.K.-line
Mod. 500	8	6	8	4
Mod. 250	6	3	8	2
Mod. 125	4	2	6	2
Mod. 50	2	1	4	2

   La distribución de los trabajadores es la siguiente:

   El departamento de fabricación de chasis dispone de 25 trabajadores, el de pintura de 18, el de montaje de 30 y el de O.K.-line de 10. Todos los trabajadores realizan una jornada laboral de 8 horas.

   Si el margen de beneficio de cada uno de los modelos es de 200.000, 140.000, 80.000 y 40.000 pesetas respectivamente,

   (a) ¿cuál ha de ser la combinación óptima de motocicletas a producir para que el beneficio sea máximo?

   (b) ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por disponer de un operario más en sólo uno de los departamentos?

   (c) Resolver el problema modificado en los siguientes casos:
   - Se contrata un nuevo operario para la sección de verificación.
   - Se consigue reducir el número de horas empleadas en la construcción del chasis de las motocicletas de 125 c.c. pasando de 4 horas a 3 horas.
   - En un nuevo avance tecnológico, la sección de construcción de chasis reduce el tiempo de fabricación unitario de las motocicletas de 125 c.c. de 4 a 2 horas.
   - ¿Interesaría fabricar motocicletas de 125 c.c. si su beneficio unitario fuese de 90.000 ptas.?

- El departamento de ventas informa que las motocicletas de 250 c.c. son invendibles al precio actual y que para poder competir con las marcas rivales el precio debería descender, situando el beneficio unitario en 120.000 ptas.

9. Cierta empresa produce cuatro artículos diferentes utilizando los materiales A y B. Dada la distancia entre el almacén proveedor y la empresa, el proveedor establece como condición para servir los materiales que el consumo mínimo mensual de Ay B debe ser de 5.600 y de 8.700 unidades.

   La estructura del proceso productivo es la siguiente:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Material A	200	150	100	45
Material B	300	250	180	82

   El coste mínimo unitario es, respectivamente, de 90, 80, 50, 24.

   (a) ¿Cuál debe ser la distribución de la producción para que los costes sean mínimos?

10. Considérese una fábrica de cerveza que produce dos tipos distintos, negra (N) y rubia (R). Para su obtención son necesarios, además de agua para la cual no hay limitación de disponibilidad, lúpulo, malta y levadura.

    La siguiente tabla muestra la capacidad necesaria de cada uno de estos recursos escasos para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas, los kilos disponibles de cada recurso y el beneficio por litro de cerveza producida.

    El problema del fabricante consiste en decidir cuánto debe fabricar de cada cerveza para que el beneficio sea máximo.

Recursos	Negra	Rubia	Disponibilidad
Lúpulo	1	2	14
Malta	3	1	15
Levadura	3	2	18
Beneficio	5	4	

    - Hallar la estrategia óptima del fabricante.
    - Para ser competitivo, el fabricante debe bajar el precio de la cerveza negra. De esta forma el beneficio por litro pasa a ser de 4 unidades monetarias. ¿Cuál es la solución óptima en esta nueva situación?.
    - Hay huelga de transportes y eso impide la llegada de malta a la fábrica. El fabricante tiene 8 kilos de malta de reserva. ¿Cuál debe ser ahora su política de fabricación?.
    - Se estropean las tuberías y el agua no se puede utilizar. El fabricante debe utilizar el agua de una fuente cercana, pero para no pagar impuestos sólo puede coger 16 litros. Si la cerveza negra necesita 1 litro de agua y la rubia necesita 3 litros, ¿cuál es la nueva solución?.

11. Una compañía desea determinar el número de unidades mensuales de los productos P_1, P_2 y P_3 que debe producir para maximizar sus beneficios totales. Para la elaboración de una unidad de cada uno de los productos se precisa de dos recursos R_1 y R_2. La cantidad de cada recurso

disponible, la cantidad de recurso que precisa cada unidad de producto y, el beneficio por cada unidad de producto se dan en la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	Cantidad máxima disponible
R_1	0	1	2	230
R_2	2	1	1	360
Beneficio/unidad	2	2	4	

Además, por necesidades de mercado, la producción mensual conjunta de P_1 y P_2 debe ser de al menos 160 unidades.

- Determinar qué cantidad de cada producto debe fabricarse con objeto de maximizar el beneficio.
- ¿Cuánto puede variar la ganancia por unidad de producto P_1 sin que se modifique la solución óptima?
- Diversos problemas en el suministro de R_1 han reducido su disponibilidad a 50, ¿cuál es la nueva solución óptima?
- Se está pensando una posible modificación de P_2 que permitiría un aumento en su beneficio por unidad, pasaría a ser de 3, pero que provocaría un cambio en la cantidad de cada uno de los recursos consumidos, que serían ahora 1 y 2, respectivamente. ¿Resultaría rentable llevar a cabo las modificaciones?
- ¿Cómo se modificaría la solución óptima si la cantidad de P_1 no pudiera superar las 100 unidades?
- Cabe la posibilidad de fabricar un nuevo producto P_4, cuyo beneficio por unidad sería de 5, y cuyo consumo de R_1 y R_2 sería de 4 y 1 unidades, respectivamente. ¿Merece la pena fabricarlo?

12. **(Diciembre 00)**Un fabricante desea producir una aleación de metales compuesta en peso por un 30% de un metal A y por el restante 70% de otro metal B. Para ello dispone de cinco aleaciones cuya composición en metales A y B y precios por kilo es la de la tabla siguiente.

Aleación	1	2	3	4	5
$\%A$	10	25	50	75	95
$\%B$	90	75	50	25	5
$Ptas./kilo$	500	400	300	200	150

La aleación deseada se producirá mezclando alguna de las aleaciones de la tabla. El fabricante desea encontrar qué cantidades debe mezclar de cada aleación de tal forma que el coste que ello requiera sea mínimo.

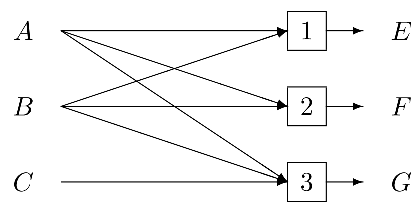
(a) Formular este problema como un problema de programación lineal.

(b) Si se deseara obtener al menos una cantidad de 30Kg. Comprobar si tomar 27Kg de la dos y 3Kg de la cuatro es solución óptima. Razona la respuesta.

(c) ¿La solución del apartado anterior es única? En caso negativo dar otras dos.

13. **(Septiembre 03)** Una planta química tiene tres productos y usa tres materias primas de oferta limitada como se muestra en la siguiente figura. Cada uno de estos tres productos se

produce mediante un proceso distinto (1,2,3) de acuerdo al esquema de la figura.



Las disponibilidades de A, B y C no tienen que ser totalmente consumidas. Datos del proceso:

Materia prima	Máximo disponible (lb/día)	Coste ($/100lb)
A	4000	1.50
B	3000	2
C	2500	2.5

Proceso	Producto	Proporciones necesarias (lb/lb de producto)	Coste de funcionamiento($)	Precio de venta del producto ($)
1	E	$\frac{2}{3}A, \frac{1}{3}B$	1/100lb de A (gastadas en 1)	4/100lb E
2	F	$\frac{2}{3}A, \frac{1}{3}B$	0.5/100lb de A (gastadas en 2)	3.3/100lb F
3	G	$\frac{1}{2}A, \frac{1}{6}B, \frac{1}{3}C$	1/100lb de G (producidad en 3)	3.8/100lb G

Escribir la función lineal beneficio y las restricciones lineales para encontrar la distribución óptima del producto, y aplicar el método simplex para obtener respuestas numéricas. Suponer que se vende todo lo que se produce.

14. **(Febrero 03)** La siguiente formulación matemática describe el problema que tiene un fabricante al asignar tres recursos a la producción anual de tres artículos. Denotamos por x_1, x_2 y x_3 las cantidades que se producirán de cada uno de los artículos. La función objetivo refleja la contribución a la ganancia de estos artículos.

$$\begin{array}{llcl}
\text{Maximizar} & f(x_1,x_2,x_3) & = & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\
\text{sujeta a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6000 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 9000 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 4000 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

(a) Comprobar que en la solución óptima las variables básicas son x_1, x_2 y la holgura de la primera restricción.

(b) ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por disponer de una unidad adicional del segundo recurso?

15. **(Junio 03)** Considerar el problema siguiente:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Minimizar} & f(x) & = & 3x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujeta a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 11 \\
 & -4x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 3 \\
 & 2x_1 - x_3 & = & -1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & &
\end{array}
$$

¿Tiene solución básica factible? Responder si o no y decir por qué.

16. **(Junio 03)** Considerar el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & f(x_1, x_2, x_3) & = & x_1 + 3x_2 - x_3 \\
\text{sujeta a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\
 & 2x_1 + x_2 & \leq & 5.
\end{array}
$$

Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué tipo de solución tiene?

(b) ¿Qué tipo de solución tiene su dual?