Apunte de Cálculo en Varias Variables

Patricio Felmer y Alejandro Jofré

Con la colaboración de:

Paul Bosch, Matías Bulnes, Arturo Prat, Luis Rademacher y José Zamora

Capítulo 1

Cálculo Diferencial

1.1 Base Algebraica y Geométrica de $I\!R^n$

Este primer capítulo tiene como objetivo el estudio de las funciones de varias variables. Estas variables son elementos de $I\!R$, por lo que lo natural es trabajar en $I\!R^n$, donde $n \in I\!N$.

Definición 1.1 *Dotamos al conjunto $I\!R^n$ de una estructura de espacio vectorial mediante las siguientes operaciones: para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I\!R^n$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in I\!R^n$, y $\lambda \in I\!R$ definimos*

Suma: $$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

Producto por escalar: $$\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

El espacio vectorial $I\!R^n$ tiene dimensión n. Entre las muchas posibles bases de $I\!R^n$ nos interesará considerar, por su simplicidad, la llamada *base canónica* $\{e_i\}_{i=1}^n$, donde $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ con el uno en la posición i. Así todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n$ se puede representar en términos de la base canónica como

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Habiéndo ya definido la estructura algebraica de $I\!R^n$ vamos a introducir la estructura geométrica de $I\!R^n$ a través del producto interno (o producto punto)

Definición 1.2 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define el producto interno o punto de x e y como*

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La siguiente proposición resume las propiedades básicas del producto interno. Su demostración es muy simple.

Proposición 1.1 *(Propiedades del producto interno)*
P1) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ sí y sólo sí $x = 0$.(Positividad)
P2) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$. (Linealidad)
P3) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. (Simetría).

La noción de producto interno induce de manera natural la noción de norma o longitud de un vector.

Definición 1.3 *Se define la norma de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ como*

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$$

La siguiente proposición establece una desigualdad entre producto interno y norma de vectores de $\mathbb{R}^n$. Ella nos permite definir la noción de ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^n$, dejando en evidencia que el producto interno determina la geometría de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se tiene la igualdad sí y sólo sí x es múltiplo escalar de y o uno de ellos es 0.

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces por las propiedades del producto interno tenemos que

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Si $y = 0$ entonces la desigualdad naturalmente vale. Si $y \neq 0$ entonces notamos que la expresión de arriba determina una función cuadrática que se anula a lo más una vez en $t \in I\!R$. Esto implica que el discriminante debe ser negativo o nulo, es decir,

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0,$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada. Cuando x es múltiplo de y entonces claramente se tiene la igualdad. Queda de ejercicio probar la recíproca. $\square$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite definir la noción de ángulo entre vectores.

Definición 1.4 *Dados $x, y \in I\!R^n$ llamaremos ángulo entre x e y a:*

$$\theta = arccos\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|},$$

entendemos que $\theta \in [0, \pi]$.

Con esta definición podemos hablar de vectores *ortogonales* cuando el ángulo entre ellos es de 90^o, es decir, cuando $\langle x, y\rangle = 0$.

También vemos la validéz del Teorema del Coseno:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|cos\theta.$$

Cuando los vectores son ortogonales tenemos el Teorema de Pitágoras.

Como ya dijimos, el producto interno induce la noción de norma, la que le da a $I\!R^n$ su carácter topológico, como ya veremos. Por el momento veamos las propiedades básicas de la norma.

Proposición 1.3 *(Propiedades de la norma)*
N1) Para todo $x \in I\!R^n$ $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ sí y sólo sí $x = 0$. (Positividad)
N2) Para todo $x \in I\!R^n, \lambda \in I\!R$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. (Homogeneidad)
N3) Para todo $x, y \in I\!R^n$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad Triangular)

Demostración: N1) y N2) son directas del las propiedades del producto interno y la definición de norma.

La Desigualdad Triangular es una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para $x, y \in I\!R^n$ tenemos

$$\langle x + y, x + y\rangle = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2,$$

de donde se obtiene

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.\square$$

Notación De ahora en adelante preferimos denotar el producto punto entre vectores x e y como $x \cdot y$.

1.2 Funciones con Valores en $I\!R^m$

Definición 1.5 *Llamaremos a f función a valores en $I\!R^m$ si $f : D \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$.*

Observamos que el argumento de f es un vector $x = (x_1, ..., x_n) \in I\!R^n$ y que la imagen de x es un vector de $I\!R^m$. Así $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$, donde las funciones $f_i : D \subseteq I\!R \to I\!R$ para cada i. Las funciones f_i se conocen como *funciones coordenadas.*

Para el estudio de las funciones de $I\!R^n$ a valores en $I\!R^m$ vamos a desarrollar las herramientas del Cálculo Diferencial. Sin embargo, la posibilidad de dibujar en el caso de dimensiones pequeñas, es siempre algo muy útil. Más aún ahora que tenemos programas computacionales muy eficientes para esta tarea. A continuación damos alguna terminología.

Definición 1.6 *Llamaremos grafo de una función $f : D \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ al conjunto:*

$$G(f) = \{(x, f(x))/x \in D\}.$$

Notemos que $G(f) \subset I\!R^{n+m}$. Este se podrá dibujar cuando $m = 1$ y $n = 1$ o $n = 2$. En el primer caso el grafo es una curva y en el segundo una superficie.

Ejercicio 1.1 *Dibuje el grafo de la función de dos variables definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$.*

Definición 1.7 *Cuando $m = 1$ y dado $c \in I\!R$ se define el Conjunto de Nivel c de la función f como*

$$N_c(f) = \{x \in D/f(x) = c\}.$$

En el caso en que $n = 2$ y $n = 3$ el conjunto de nivel $N_c(f)$ se puede dibujar. Se le conoce como curva de nivel cuando $n = 2$ y superficie de nivel si $n = 3$.

Ejercicio 1.2 *Dibuje las superficies de nivel para la función de tres variables definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.*

Ejercicio 1.3 *1) Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. Esta función se conoce como silla (silla de montar).*

2) Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Esta función se conoce como Silla del Mono. ¿Podría decir porqué?

1.3 Límites y Continuidad

La noción de límite y continuidad de funciones de $I\!R^n$ en $I\!R^m$ involucra el carácter topológico de estos espacios, inducido por la norma.

En el estudio de la topología de $I\!R^n$, un rol fundamental es jugado por las bolas abiertas.

Definición 1.8 *Dados $x_0 \in I\!R^n$, $r \in I\!R_+$, llamaremos bola abierta de centro en x_0 y radio r al conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in I\!R^n / \quad \|x - x_0\| < r\}.$$

Llamaremos bola cerrada de centro en x_0 y radio r al conjunto

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in I\!R^n / \quad \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Definición 1.9 *Diremos que $A \subseteq I\!R^n$ es un conjunto abierto si*

$$(\forall x_0 \in A)(\exists r > 0) : B(x_0, r) \subseteq A.$$

Ejemplo 1.1 *$I\!R^n$ y el conjunto vacío $\emptyset$, son conjuntos abiertos. Aún cuando $I\!R^n$ es obviamente abierto, el caso del conjunto vacío requiere una reflexión. Si $\emptyset$ no es abierto entonces existe $x_0 \in \emptyset$ para el cual $B(x_0, r) \cap I\!R^n \neq \emptyset$, para cada $r > 0$. Esto es absurdo pues no hay elementos en $\emptyset$.*

Ejemplo 1.2 *El conjunto $A = \{(x, y) \,/\, x > 1\}$ es un conjunto abierto. En efecto, si $(x, y) \in A$ entonces $B((x, y), \frac{x-1}{2}) \subset A$.*

Ejemplo 1.3 *Si $x_0 \in I\!R$ y $r > 0$ entonces $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto. En efecto, si $x \in B(x_0, r)$ entonces $B(x, (r - \|x - x_0\|)/2) \subset B(x_0, r)$. Usando la desigualdad triangular muestre la veracidad de esta última afirmación y haga un dibujo.*

Definición 1.10 *Diremos que $A \subseteq I\!R^n$ es un conjunto cerrado si A^c es abierto.*

Observación 1.1 *Notar que los conjuntos $I\!R^n$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados. También notamos que hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados. Ver ejemplo abajo.*

Ejemplo 1.4 *Sean* $A = \{\frac{1}{n} \quad / n \in I\!N\}$ *y* $B = A \cup \{0\}$. *Entonces:*

i)A *no es cerrado. En efecto* A^c *no es abierto, pues* $0 \in A^c$ *y:* $(\forall r > 0) \quad B(0,r) \nsubseteq A^c$. *Lo anterior pues cualquiera sea* $r > 0$ *se tiene que*

$$(\exists n \in I\!N) \textit{tal que} \quad \frac{1}{n} < r,$$

es decir, $\frac{1}{n} \in B(0,r)$.

ii)A *no es abierto pues* $1 \in A$, *pero* $(\forall r > 0) \quad B(x_0, r) \nsubseteq A$.

iii)B *es cerrado y no es abierto.*

Como en el caso de $I\!R$ uno puede definir sucesiones de vectores en $I\!R^n$. Se trata de una funciones de $I\!N \to I\!R^n$ tales que $k \to x_k$. Usualmente se considera la notación $\{x_k\}_{k \in I\!N}$.

Definición 1.11 *Una sucesión* $\{x_k\}_{k \in I\!N}$ *en* $I\!R^n$ *se dice convergente a* $x \in I\!R^n$ *si:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in I\!N) : \quad \|x_k - x\| < \varepsilon \quad (\forall k \geq k_0)$$

En el caso que $x \in I\!R^n$ converge a x anotamos $x_k \to x$ o $\lim_{k \to \infty} x_k = x$. Notamos que la condición $\|x_k - x\| < \varepsilon$ es equivalente a $x_k \in B(x, \varepsilon)$.

Es interesante que uno puede caracterizar los conjuntos cerrado mediante el uso de sucesiones. En realidad uno podría describir completamente la topología de $I\!R^n$ usando sucesiones, pero no lo haremos.

Proposición 1.4 $A \subseteq I\!R^n$ *es cerrado sí y sólo sí :*

$$\textit{Para toda sucesión } \{x_k\}_{k \in I\!N} \subseteq A : ((x_k \to x) \Rightarrow x \in A).$$

Demostración:($\Rightarrow$) Supongamos que A es cerrado. Sea $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subseteq A$ una sucesión cualquiera tal que $\lim_{x_k \to x} x_k = x$. Queremos demostrar que $x \in A$. Supongamos que no, es decir, que $x \in A^c$. Como A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A^c$. Por otra parte, de la definición de límite, existe $k_0 \in I\!N$ tal que $x_k \in B(x, \varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$, lo que es imposible pues $x_k \in A$.

($\Leftarrow$) Para demostrar la recíproca probemos la contrarrecíproca. Es decir, si A no es cerrado entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in I\!N} \subset A$ que converge a x y $x \notin A$.

Como A no es cerrado, A^c no es abierto, entonces existe un punto $x \in A^c$ tal que

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ se tiene } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Esta proposición nos permite construir una sucesión $\{x_k\} \subset A$ de la siguiente manera: para cada $k \in I\!N$ tomamos $\varepsilon = \frac{1}{k}$ entonces, como $B(x, 1/k) \cap A \neq \emptyset$, podemos elegir $x_k \in B(x, \frac{1}{k})$ y $x_k \in A$. Por definición esta sucesión converge a x, concluyendo la demostración pues $x \notin A$. $\square$

Continuando con nuestra discusión sobre la topología de $I\!R^n$ hacemos algunas nuevas definiciones.

Definición 1.12 *Sea $A \subseteq I\!R^n$. Entonces:*
$x \in A$ *se dice punto interior de* A *si* $(\exists \varepsilon > 0): \quad B(x, \varepsilon) \subseteq A$.
$x \in I\!R^n$ *se dice punto adherente de* A *si* $(\forall \varepsilon > 0): \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
$x \in I\!R^n$ *se dice punto de acumulación de* A *si* $(\forall \varepsilon > 0): \quad (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
$x \in I\!R^n$ *se dice punto frontera de* A *si* $(\forall \varepsilon > 0): \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Observamos que un punto adherente de A no necesita estar en A, así mismo un punto de acumulación y un punto frontera no necesitan estar en A.

Definición 1.13 *Dado $A \subseteq I\!R^n$ se definen los siguientes conjuntos:*
Interior de A: $int(A) = \{x \in A / x \text{ es punto interior de } A\}$,
Adherencia de A: $adh(A) = \{x \in I\!R^n / x \text{ es punto adherente de } A\}$,
Derivado de A: $der(A) = \{x \in I\!R^n / x \text{ es punto de acumulacion de} A\}$,
Frontera de A: $\partial A = Fr(A) = \{x \in I\!R^n / x \text{ es punto frontera de } A\}$.

Observación 1.2 $int(A) \subset A$ *y* $A \subset adh(A)$.

Ejemplo 1.5 *En $I\!R$ sea $A = [1, 2) \cup \{3\}$. Entonces: $der(A) = [1, 2]$, $int(A) = (1, 2)$, $adh(A) = [1, 2] \cup \{3\}$ y $\partial A = \{1, 2, 3\}$.*

Ejercicio 1.4 *Demuestre que $I\!R^n \setminus int(A) = adh(I\!R^n \setminus A)$.*

Ejercicio 1.5 *Analice el interior, la adherencia, el derivado y la frontera de*

$$A = \bigcup_{k=2}^{\infty} B((\frac{3}{2^{k+1}}, 0), \frac{1}{2^{k+1}}) \bigcup \overline{B}((\frac{3}{4}, 0), \frac{1}{4}).$$

Se obtiene de las definiciones la siguiente proposición:

Proposición 1.5 *A es abierto sí y sólo sí $A = int(A)$ y A es cerrado sí y sólo sí $A = adh(A)$.*

Ejercicio 1.6 *Demuestre que* $x \in adh(A)$ *sí y sólo sí existe una sucesión* $\{x_k\}_k \subset A$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Con este ejercicio terminamos esta breve introdución a la topología de $I\!R^n$ y estamos en condiciones de presentar la noción de límite de una función.

Definición 1.14 *Sea* $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ *y* $x_0 \in der(A)$. *Entonces decimos que* l *es el límite de* f *cuando* x *va a* x_0 *y escribimos* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0): \quad (0 < \|x - x_0\| < \delta) \wedge (x \in A) \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Observación 1.3 *En la anterior definición pedimos que* $x_0 \in der(A)$ *para que siempre haya puntos cerca de* x_0.

A continuación desarrollaremos dos ejemplos en los cuales debemos efectivamente demostrar el valor de un cierto límite. Para ello es necesario dar una *receta* o *fórmula* que permita determinar δ dado ε.

Ejemplo 1.6 *Demuestre usando la definición que*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - 1) = 0.$$

En primer lugar vemos que a partir de

$$\|(x, y) - (1, 1)\| < \delta$$

se puede deducir directamente que

$$|x - 1| < \delta \quad \text{y} \quad |y - 1| < \delta \text{ y entonces } |x - 1| < \delta \quad \text{y} \quad |x| < \delta + 1. \qquad (*)$$

Por otro lado

$$|f(x) - l| = |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1|. \qquad (**)$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ de modo que

$$\delta(\delta + 1) < \varepsilon.$$

Entonces, si $\|(x, y) - (1, 1)\| < \delta$, tenemos (*), y entonces obtenemos de (**) que

$$|f(x) - l| \leq \delta(\delta + 1) < \varepsilon.\Box$$

El ejemplo anterior es bastante simple. La dificultad puede aumentar cuando la función f es más complicada, por ejemplo si es un cuociente.

Ejemplo 1.7 *Demuestre usando la definición que*

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2}{x-y} = 4.$$

Partimos como en el ejemplo anterior viendo que si

$$\|(x,y)-(1,1)\| < \delta$$

entonces se tiene directamente que

$$|x-2| < \delta \quad \text{y} \quad |y-1| < \delta. \qquad (*)$$

Por otro lado, un desarrollo algebraico simple nos lleva a lo siguiente

$$|f(x)-l| = |\frac{x^2}{x-y} - 4| = \frac{|x^2-4x-4y|}{|x-y|} = \frac{|(x-2)^2-4(y-1)|}{|x-y|}. \qquad (**)$$

Observamos aquí dos hechos relevantes. Primero, en el numerador tenemos una expresión que depende esencialmente de $|x-2|$ y $|y-1|$, cantidades controladas por δ, según(*). Segundo, en el denominador tenemos $|x-y|$, que es una cantidad que podría anularse si uno no es cuidadoso.

Para tratar este último término procedemos en una primera etapa encontrando un valor δ_1 intermedio, que si bien no nos permitirá acotar por ε nos permitirá controlar $|x-y|$. El denominador no se anula en $(2,1)$, de aquí vemos que si elegimos $\delta_1 = 1/4$, por ejemplo, entonces de (*) podemos concluir que

$$|x-y| > \frac{1}{2}. \qquad (***)$$

Suponiendo entonces que (***) se tiene, obtenemos de (*) y (**) que

$$|f(x)-l| = \frac{|(x-2)^2-4(y-1)|}{|x-y|} \leq 2|(x-2)^2-4(y-1)|.$$

De aquí, usando nuevamente (*) podemos acotar mejor

$$|f(x)-l| \leq \frac{1}{2}|x-2| + 8|y-1| \leq 8(|x-2|+|y-1|).$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{16}$. Pero debemos asegurarnos que los argumentos anteriores sean siempre válidos y eso lo logramos si elegimos $\delta = Min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{16}\}$ y se tendrá que

$$\|(x,y)-(2,1)\| < \delta \Rightarrow |\frac{x^2}{x-y} - 4| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ejemplo 1.8 *Demostrar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

Del curso de Cálculo sabemos que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\alpha| < \delta_1 \Rightarrow |\frac{sen\alpha}{\alpha} - 1| < \varepsilon,$$

Elijamos ahora $\delta = \sqrt{\delta_1}$. Entonces $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ implica que $|x^2+y^2| < \delta_1$ y entonces

$$|\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1| < \varepsilon.\square$$

Observación 1.4 *Notamos que una manera equivalente de escribir la noción de límite es la siguiente: para toda bola abierta $B(l,\varepsilon)$ existe una bola abierta $B(x_0,\delta)$ tal que*

$$x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l,\varepsilon)$$

o equivalentemente

$$f((B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A) \subset B(l,\varepsilon).$$

Ahora vamos a desarrollar el concepto de límite estudiando sus principales propiedades. En toda esta sección hacemos notar la analogía que se tiene con el curso de Cálculo, donde se estudio el concepto de límite y continuidad para funciones de una variable real. Es sorprendente que la mayoría de las proposiciones que veremos a continuación tienen una demostración que se obtiene de la análoga de Cálculo reemplazando $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$.

Proposición 1.6 (Unicidad del Límite) *Sea $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ y $x_0 \in der(A)$. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad y \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

Entonces $l_1 = l_2$.

Demostración: Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$[0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \quad \wedge \quad x \in A] \Rightarrow \|f(x) - l_1\| < \varepsilon,$$

$$[0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \quad \wedge \quad x \in A] \Rightarrow \|f(x) - l_2\| < \varepsilon.$$

Entonces, si $\|x - x_0\| < Min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tendrá que

$$\|l_1 - l_2\| \leq \|(f(x) - l_1) - (f(x) - l_2)\| \leq \|f(x) - l_1\| + \|f(x) - l_2\| < 2\varepsilon.$$

Como ε puede ser arbitrariamente pequeño, debemos tener que $l_1 = l_2$. $\square$

La siguiente proposición es muy útil para estudiar la existencia de un determinado límite. Se usa principalmente para mostrar que una cierta función no tiene límite

Proposición 1.7 *Sea* $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R$ *y* $x_0 \in der(A)$ *tal que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Entonces para todo $B \subseteq A$ *tal que* $x_0 \in der(B)$ *se tiene que*

$$\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = l.$$

Demostración: Ejercicio. $\square$

La contrarrecíproca nos da el siguiente corolario

Corolario 1.1 *Sea* $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$, $x_0 \in der(A)$ *y* $B_1, B_2 \subseteq A$, *de manera que* $x_0 \in der(B_1) \cap der(B_2)$. *Si uno de los límites*

$$\lim_{x \to x_0} f|_{B_1}(x) \quad o \quad \lim_{x \to x_0} f|_{B_2}(x)$$

no existe o si

$$\lim_{x \to x_0} f|_{B_1}(x) \neq \lim_{x \to x_0} f|_{B_2}(x)$$

entonces el límite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

no existe.

Ejemplo 1.9 *Se trata de estudiar el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}.$$

Notemos en primer lugar que $f(0,0)$ no está definida, sin embargo esto no tiene importancia alguna. Lo que sí importa es que $(0,0) \in der(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Si consideramos los conjuntos $A = \{(0,y)/y \neq 0\}$ y $B = \{(x,0)/x \neq 0\}$ entonces tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_A(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_B(x,y) = 1.$$

Concluimos entonces que el límite bajo estudio no existe, en virtud del corolario.□

Ejercicio 1.7 *Estudiar la existencia del siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Ejercicio 1.8 *Estudiar la existencia del siguiente límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y donde f está definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} \exp - \frac{|x|}{y^2} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0. \end{cases}$$

Observación 1.5 *En los ejemplos anteriores hemos considerado solamente funciones a valores reales, es decir, con espacio de llegada $\mathbb{R}$. Esto queda justificado en la siguiente proposición.*

Proposición 1.8 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \textit{sí y sólo sí} \qquad (\forall i = 1, \cdots, m) \lim_{x\to x_0} f_i(x) = l_i.$$

Aquí f_i es la i-ésima función coordenada y l_i is la i-ésima coordenada de l.

Demostración:($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe $\delta_i > 0$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta_i$ y $x \in A$ implica que $|f_i(x) - l_i| < \varepsilon/\sqrt{m}$, para cualquier

$i = 1, 2, ..., m$. Entonces, si elegimos $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$. tenemos que si $0 < \|x - x_0\| < \delta$ y $x \in A$ implica

$$\sum_{i=1}^{m}(f_i(x) - l_i)^2 < m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2,$$

de donde $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.$\square$

El siguiente teorema resume varias propiedades importantes de los límites.

Teorema 1.1 *Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in der(A)$, $b, d \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ *implica* $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cb$.

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = d$ *implica*

i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = b + d$,

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = b \cdot d$.

3) $m = 1$ *y* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b \neq 0$, *implica*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}.$$

Demostración: Haremos la demostración de 2) ii). La propiedad 3) queda de ejercicio.

Usando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz obtenemos directamente

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - b \cdot d| &= |f(x) \cdot (g(x) - d) + d \cdot (f(x) - b)| \\ &\leq \|f(x)\| \, \|g(x) - d\| + \|d\| \, \|f(x) - b\|. \end{aligned}$$

Usando la hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implica que

$$\|f(x) - b\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g(x) - d\| < \varepsilon.$$

Notamos que de aquí se deduce que $\|f(x)\| < \varepsilon + \|b\|$. Por lo tanto

$$|f(x) \cdot g(x) - b \cdot d| < (\varepsilon + \|b\| + \|d\|)\varepsilon,$$

completando la demostración. $\square$

Observación 1.6 *En rigor, en la demostración anterior falta un paso, el cual se puede siempre omitir cuando hay experiencia:*
Dado $\varepsilon > 0$ *elegimos* $\sigma > 0$ *tal que* $(\sigma + \|b\| + \|d\|)\sigma < \varepsilon$. *Con este valor de* $\sigma > 0$ *invocamos la hipótesis para elegir* $\delta > 0$ *de modo que* $x \in A$ *y* $0 < \|x - x_0\| < \delta$ *implica que*

$$\|f(x) - b\| < \sigma \quad y \quad \|g(x) - d\| < \sigma.$$

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Ahora que hemos estudiado el concepto de límite estamos preparados para introducir el concepto de continuidad de una función.

Definición 1.15 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y sea* $x_0 \in A$. *Decimos que* f *es continua en* x_0 *si:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : [x \in A \quad \wedge \quad \|x - x_0\| < \delta] \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : f(B(x_0, \delta) \cap A) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Observación 1.7 *Si* $x_0 \in A$ *es un punto aislado de* A, *es decir,* $x_0 \in A \setminus der(A)$ *entonces* f *es obviamente continua en* x_0.

Si $x_0 \in der(A)$ *entonces* f *es continua en* x_0 *sí y sólo sí*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Como consecuencia de la observación anterior y de la Proposición 1.8 se tiene que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $x_0 \in A$ sí y sólo sí f_i es continua en x_0, para todo $i = 1, \cdots, m$.

Como consecuencia del Teorema 1.1 tenemos también el siguiente resultado sobre funciones continuas.

Teorema 1.2 *Sean* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

1) f *es continua en* x_0 *implica* cf *es continua en* x_0.

2) f *y* g *son continuas en* x_0 *implica*

i) $f + g$ *es continua en* x_0,

ii) $f \cdot g$ *es continua en* x_0,

3) $m = 1$, f *es continua en* x_0 *y* $f(x_0) \neq 0$ *implica* $\frac{1}{f(x)}$ *es continua en* x_0.

Ejemplo 1.10 *La función* $f(x,y) = (\frac{x^2}{1+y^2}, x+y, ysenx)$ *es continua en todo punto de* $\mathbb{R}^2$.

En efecto, sus tres componentes son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

$f_1(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$ lo es pues $f(x) = x^2$ lo es, al igual que $g(y) = 1+y^2$ la cual además no se anula. Entonces, por el teorema anterior $\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{1+y^2}$ también es continua, y nuevamente por el teorema anterior $x^2\frac{1}{1+y^2}$ es continua.

$f_2(x,y) = x+y$ es evidentemente continua pues $f(x) = x$ e $g(y) = y$ son continuas y la suma de continuas es continua por el teorema anterior.

$f_3(x) = senx$ es continua, $g(y) = y$ también lo es, luego por el teorema anterior $ysenx$ es continua.

La idea es que con la ayuda del Teorema anterior podamos determinar por inspección cuando una función es continua, por ser una *combinación* de funciones continuas conocidas.$\square$

En la linea del Teorema 1.2, tenemos el teorema de la composición de funciones continuas.

Teorema 1.3 *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *tales que* $f(A) \subseteq B$. *Si* f *es continua en* $x_0 \in A$ *y* g *es continua en* $f(x_0) \in B$ *entonces* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(x_0)$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$y \in B, \quad \|y - f(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|g(y) - g(f(x_0))\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, de la continuidad de f en x_0 sabemos que existe $\delta' > 0$ tal que:

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta' \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \delta.$$

Juntando estas dos proposiciones y tomando $y = f(x)$ se tiene que existe $\delta' > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B, \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \delta \\ &\Rightarrow \quad \|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\|x - x_0\| < \delta' \quad \Rightarrow \quad \|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ejemplo 1.11 $f(x,y,z,t) = sen(t(x^2+y^2+z^2))$ *es continua en todo punto de* $\mathbb{R}^4$.

Definición 1.16 *Diremos que* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *es una vecindad de* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *si* $x_0 \in A$ *y* A *es abierto.*

La siguiente proposición da una caracterización de la continuidad en términos de vecindades. Notar que la bola abierta $B(x,r)$ es una vecindad de x.

Proposición 1.9 $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *sí y sólo sí para toda vecindad* $U \subset \mathbb{R}^n$ *de* $f(x_0)$ *existe una vecindad* $V \subset \mathbb{R}^n$) *de* x_0 *tal que* $f(V \cap A) \subset U$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea U una vecindad de $f(x_0)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0),\varepsilon) \subset U$. Usando ahora la continuidad de f en x_0, para este $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{y} \quad x \in A \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Es decir

$$x \in B(x_0,\delta) \quad \text{y} \quad x \in A \Rightarrow \quad f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon).$$

Si definimos $V = B(x_0,\delta)$, que es una vecindad de x_0, obtenemos de aquí que

$$f(B(x_0,\delta) \cap A) = f(V \cap A) \subset U.$$

($\Leftarrow$) Esta implicación queda de ejercicio. $\square$

Definición 1.17 *Decimos que una función* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* A *si* f *es continua en todo punto de* A.

Ejercicio 1.9 *Demuestre la siguiente caracterización de funciones continuas en* A*:*
f *es continua en* A *sí y sólo sí la preimagen de todo abierto de* $\mathbb{R}^m$ *es la intersección de* A *con un abierto de* $\mathbb{R}^n$.

1.4 Diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Consideremos $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \in A$, donde el conjunto A se supone abierto. Para $1 \leq j \leq n$ fijo, definimos la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$$h \to f(x + he_j),$$

donde e_j es el elemento j-ésimo de la base canónica. Notamos que $x + he_j = (x_1, \cdots, x_{j-1}, h + x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ A esta función, siendo de $I\!R$ en $I\!R$, le podemos aplicar la teoría de diferenciabilidad desarrollada en el curso de Cálculo.

Definición 1.18 *Llamaremos derivada parcial de f con respecto a x_j en $x \in I\!R^n$ a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

si dicho límite existe. Cuando la derivada parcial de f con respecto a x_j existe en todo punto de A, entonces ella define una función

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq I\!R^n \to I\!R.$$

Observación 1.8 *Notemos que, como una derivada parcial es una derivada de una función de $I\!R$ en $I\!R$, uno puede usar todas las reglas de derivación estudiadas en Cálculo.*

Ejemplo 1.12 *Calcular la derivada parcial de la función f con respecto a x para $f(x, y) = x^4 y + sen(xy)$. Haciendo uso de la observación anterior tendremos que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 4x^3 y + cos(xy)y$$

Ejemplo 1.13 *Calcular la derivada parcial de la función f con respecto a x para $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Para esto notamos que si $(x, y) \neq (0, 0)$ entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Si definimos $f(0, 0) = 0$ entonces podemos calcular también la derivada parcial de f con respecto a x en $(0, 0)$. Aquí usamos la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

En la noción de diferenciabilidad hay dos aspectos a considerar: el aspecto analítico y el aspecto geométrico. Parece tentador definir una función diferenciable en un punto como una función que posee todas sus derivadas parciales en dicho punto. Sin embargo esta condición no es suficiente para producir una buena definición, pues nos gustaría que al menos se cumplan las siguientes propiedades:

1) Si f es diferenciable en un punto entonces es posible definir un plano tangente al grafo de la función en dicho punto. Este es el criterio geométrico.

2) La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Este sería un criterio analítico.

Ejemplo 1.14 *El siguiente ejempo ilustra las ideas anteriores. Consideremos la función definida por $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Calculando las derivadas parciales por definición obtenemos que estas existen y son*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Uno esperaría que el plano tangente a la función f en el punto $(0,0,0)$ estuviera dado por la ecuación $z = 0$, para ser consecuentes con el valor de las derivadas parciales de f en el $(0,0)$. Sin embargo, este plano no puede ser tangente al grafo de la función en $(0,0)$, pues sobre la recta $y = x$ el grafo de f tiene pendiente infinita en el origen.

Por otro lado, $g : I\!R \to I\!R^2$ definida por $g(x) = (x,x)$ es diferenciable en cero con $g_1'(0) = g_2'(0) = 1$, pero $f \circ g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ no es diferncciable en 0.

Concluimos de este ejemplo que la noción de diferenciabilidad debe involucrar algo más que la sola existencia de las derivadas parciales en el punto.

Veamos ahora el aspecto geométrico en $I\!R^2$ para motivar la definición en general. Supongamos que queremos ajustar un plano tangente al grafo de $f : I\!R^2 \to I\!R$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in G(f)$. Es decir queremos encontrar un plano en $I\!R^3$ que pase por el punto y que tenga la misma inclinación que el grafo de f en el punto. Para esto consideremos un plano genérico $z = a + bx + cy$ y deduzcamos de las condiciones que mencionamos antes el valor de las constantes a, b y c. En primer lugar queremos que (x_0, y_0, z_0) pertenezca al plano tangente, entonces

$$f(x_0, y_0) = z_0 = a + bx_0 + cy_0.$$

Fijando la variable x_0 se debería tener que las recta $z = a + bx_0 + cy$ debe ser tangente al grafo de $z = f(x_0, y)$ en el punto y_0. Esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b.$$

De manera análoga
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = c.$$
Es decir, el plano buscado es
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Definición 1.19 *Sea $f : A \subseteq I\!R^2 \to I\!R$, A abierto y $(x_0, y_0) \in A$. Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si:*

1) Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, y

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Intuitivamente estamos pidiendo a f, para que sea diferenciable, que su grafo y el plano tangente al grafo en el punto estén muy cerca, tan cerca que incluso al dividir su distancia por $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ la fracción todavía es pequenã.

Vamos ahora al caso general:

Definición 1.20 *Sea $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$, A abierto y $x_0 \in A$. Entonces, si todas las derivadas parciales de todas las funciones coordenadas existen en x_0, podemos definir una matriz $Df(x_0) \in M_{m\times n}(I\!R)$ como*
$$(Df(x_0))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$
Esta matriz se conoce como matriz Jacobiana o Diferencial de f en x_0.

Ejercicio 1.10 *Encuentre la matriz Jacobiana de la función definida por $f(x, y) = (xe^y, x^2 + y\cos(x + y), \tanh(xy))$.*

Definición 1.21 *Sea $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$, A abierto y $x_0 \in A$. Decimos que f es diferenciable en x_0 si*

1) Para todo $i = 1, \cdots, m$ y para todo $j = 1, \cdots, n$: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ existe y

2) $$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Observación 1.9 *Usualmente la condición 2) se escribe de manera equivalente como*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h\|}{\|h\|}=0.$$

Observación 1.10 *En vista de la Proposición 1.8 tenemos que una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0 \in A$ sí y sólo sí cada una de las funciones componentes $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$.*

Observación 1.11 *Notamos que la diferenciabilidad tiene que ver con la posibilidad de aproximar la función $f(x)$ por una función lineal afín $L(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ cerca de x_0. En ocasiones L se llama aproximación de primer orden de f en x_0. Como ya vimos en el caso de $n = 2$ y $m = 1$, lo anterior se interpreta geométricamente como la posibilidad de ajustar el plano tangente al grafo de f en x_0.*

Ejemplo 1.15 *Encuentre el plano tangente al grafo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$. Calculamos las derivadas parciales en $(1, 1)$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2x|_{(1,1)} = 2 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2y|_{(1,1)} = 2 \qquad .$$

Entonces el plano tangente tiene por ecuación

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1),$$

es decir

$$z = -2 + 2x + 2y.$$

Aproximación de primer orden

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en $x_0 \in A$. Entonces la función lineal afín

$$L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$$

es una aproximación de la función $f(x_0+h)$ cerca de $h = 0$. No sólo $f(x_0+h)$ y $L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$ son muy parecidas, sino que además

$$\frac{f(x_0+h)-L(h)}{\|h\|}$$

es también muy pequeño para h pequeño, En el caso $m = 1$ y $n = 2$ tenemos que

$$L(h) = L(h_1,h_2) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2,$$

aproxima a f al primer orden cerca de (x_0, y_0).

Ejemplo 1.16 *Encuentre una aproximación de primer orden para la función $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida por $f(x,y) = x\cos(y) + e^{xy}$, cerca del punto $(x_0, y_0) = (1, \pi)$.*

Tenemos $f(1,\pi) = -1 + e^{\pi}$ y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) = -1 + \pi e^{\pi} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = e^{\pi}.$$

Así la aproximación de primer order es

$$f(1+a, \pi+b) \sim -1 + e^{\pi} + (-1 + \pi e^{\pi})a + e^{\pi}b.\Box$$

Observación 1.12 *En general, los vectores de $I\!R^n$ deberían considerarse como vectores columna. De esta manera la matrix Jacobiana y el producto $Df(x_0)h$, $h \in I\!R^n$ tiene sentido. Sin embargo, cuando esto no lleve a confusión, muchas veces escribiremos los vectores de $I\!R^n$ como vectores filas, por economía notacional.*

Gradiente de una función.

La matriz Jacobiana de una función de $I\!R^n$ en $I\!R$ es una matriz de $1 \times n$

$$Df(x_0) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)].$$

Es costumbre identificar esta matriz con un vector de $I\!R^n$ llamado *gradiente* de f en x_0. Así

$$\nabla f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))^t.$$

Con esta notación la aproximación lineal tiene la siguiente forma

$$L(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Relación entre continuidad y diferenciabilidad

A continuación abordamos la relación entre continuidad y diferenciabilidad. Al igual que en el caso de las funciones de una variable, la diferenciabilidad es un concepto más fuerte que el de continuidad, en el sentido que, toda función diferenciable en un punto es también continua en dicho punto. Pero la relación no termina allí. Si bien la mera existencia de las derivadas parciales de una función en un punto no garantiza su diferenciabilidad, en el caso que esas derivadas parciales existen y son continuas en una vecindad de dicho punto entonces sí hay diferenciabilidad de la función.

Comencemos extendiendo la desigualdad de Cauchy-Schwarz al producto de una matriz por un vector. Sea A una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2) = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)\|x\|^2$$

Esta desigualdad sugiere definir la *norma* de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ como

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Podemos resumir esto en la siguiente proposición

Proposición 1.10 *Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|.$$

Ejercicio 1.11 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(x) = a + Ax$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que*
1) f es continua en $\mathbb{R}^n$.
2) f es diferenciable en todo x y $Df(x) = A$.

Teorema 1.4 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A$. Entonces*

$$f \text{ es diferenciable en } x_0 \quad \text{implica} \quad f \text{ es continua en } x_0.$$

Demostración: Si f es diferenciable en x_0 entonces existe la matriz Jacobiana de f en x_0 y

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Así dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces:

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Entonces, usando la desigualdad triangular y la Proposición 1.10, obtenemos

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon\|x - x_0\| + \|Df(x_0)(x - x_0)\| \leq (\varepsilon + \|Df(x_0)\|)\|x - x_0\|$$

De esta manera, si elegimos $\delta_1 = min\{\delta, \varepsilon/(\varepsilon + \|Df(x_0)\|)\}$ obtenemos

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

es decir, f es continua en x_0 $\square$

Corolario 1.2 *Si f es diferenciable en x_0 entonces existen δ y K tales que*

$$\|x - x_0\| < 0 \quad \textit{implica} \quad \|f(x) - f(x_0)\| \leq K\|x - x_0\|.$$

Demostración: Basta tomar $\varepsilon = 1$ y $K = 1 + \|Df(x_0)\|$ en la demostración del teorema.□

Retomaremos esta propiedad cuando veamos más adelante el Teorema del Valor Medio.

Continuando con la relacion entre diferenciabilidad y continuidad consideremos una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A$. Supongamos que las derivadas parciales de f existen no sólo en x_0 sino que en una vecindad de $V \subseteq A$ de x_0. Entonces estas definen funciones

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : V \to \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

El siguiente teorema nos dá una condición suficiente para que una función f sea diferenciable en x_0.

Teorema 1.5 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que sus derivadas parciales existen en una vecindad de x_0 y son continuas en x_0. Entonces f es diferenciable en x_0.*

Demostración: En vista de la Observación 1.10, basta demostrar el teorema para $m = 1$. La demostración en el caso general para n es análoga al caso $n = 2$. Nosotros haremos sólo el caso $n = 2$ y dejamos el caso general al lector. Nuestra demostración se basa en el Teorema del Valor Medio para funciones de una variable, el que recordamos a continuación:

Teorema 1.6 (Teorema de Valor Medio en $\mathbb{R}$) *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Consideremos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) =$$
$$f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01} + h_1, x_{02}) + f(x_{01} + h_1, x_{02}) - f(x_{01}, x_{02}).$$

Fijemos $x_{01} + h_1$ y supongamos que $h_2 > 0$. Definamos la función $g : [0, h_2] \to \mathbb{R}$ como $g(s) = f(x_{01} + h_1, x_{02} + s)$. Como la derivada parcial con respecto ya y existe en una vecindad de x_0, si h es pequeño, la función g es derivable en $[0, h_2]$. Entonces, aplicando el teorema del valor medio a g existe $c_2 \in [x_{02}, x_{02} + h_2]$ tal que

$$f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01} + h_1, x_{02}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01} + h_1, x_{02} + c_2).$$

Si $h_2 < 0$ entonces se define g en $[h_2, 0]$ y se procede de manera análoga. Notemos que en cualquier caso $|c_2| < |h_2| \leq \|h\|$.

Por el mismo argumento, fijando ahora x_{02} se tendrá que existe c_1 talque $|c_1| < |h_1| \leq \|h\|$ y

$$f(x_{01} + h_1, x_{02}) - f(x_{01}, x_{02}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01} + c_1, x_{02}).$$

Y así, si anotamos $\bar{x}_1 = (x_{01} + h_1, x_{02} + c_1)$ y $\bar{x}_2 = (x_{01} + c_1, x_{02})$ tenemos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_2)h_2$$

y de aquí

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h \\ = \ & [\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)]h_1 + [\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)]h_2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Usemos ahora la continuidad de las derivadas parciales en x_0. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

y existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Eligiendo $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $\|h\| < \delta$ entonces para $j = 1, 2$,

$$\|\bar{x}_j - x_0\| = |c_j| < |h_j| \leq \|h\| < \delta$$

y así

$$|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Reemplazando esta última igualdad en la ecuación (*) y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned} & |f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h| \\ \leq & \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\right)^2}\|h\|, \end{aligned}$$

de donde

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}}\|h\| = \varepsilon\|h\|. \qquad \square$$

Definición 1.22 *$f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ se dice de clase C^1 en $x_0 \in A$ si f es diferenciable en x_0 y todas las derivadas parciales de f son continuas en x_0.*

Definición 1.23 *$f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ se dice diferenciable en A si f es diferenciable en cada punto de A. f se dice de clase C^1 en A si f y todas sus derivadas parciales son continuas en A.*

Ejemplo 1.17 *$f(x,y) = \frac{cos(x)+e^{xy}}{x^2+y^2}$ es diferenciable en cada punto $(x,y) \neq (0,0)$ pues $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en cualquier punto distinto del $(0,0)$.*

Ejemplo 1.18 *Las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$ estudiada anteriormente no estan definidas en una vecindad del origen, menos pueden ser continuas.*

Ejercicio 1.12 *Considere la función definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Muestre que f es continua en $(0,0)$.
ii) Calcule las derivadas parciales con respecto a x e y en todo punto del plano.
iii) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?
iv) ¿Son continuas las derivadas parciales en $(0,0)$?
v) ¿Es f diferenciable en $(x,y) \neq (0,0)$?

Ejercicio 1.13 *Según los últimos teoremas vistos tenemos las siguientes implicaciones:*
Derivadas parciales continuas en $x_0 \Rightarrow f$ diferenciable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0. Además
f diferenciable en $x_0 \Rightarrow$ existen todas las derivadas parciales en x_0.
Encontrar ejemplos donde se muestra que las recíprocas de estas implicaciones son falsas.

Volvemos ahora a la idea de aproximación que lleva el concepto de diferenciabilidad. Vimos que si f es diferenciable en un punto x_0 entonces la función lineal afín $Lh = f(x_0) + Df(x_0)h$ aproxima a f en primer orden. Nos interesa ahora la recíproca.

Teorema 1.7 *Sea $f : A \subseteq I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ una función continua en $x_0 \in A$ y L una función lineal afín, $Lh = a + Bh$ con $a \in I\!\!R^m$ y $B \in M_{m\times n}(I\!\!R)$. Supongamos que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - Lh\|}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

Entonces $a = f(x_0)$ y $B = Df(x_0)$ y f es diferenciable en x_0.

Demostración: Por hipótesis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - Lh\|}{\|h\|} = 0,$$

entonces se tiene en particular que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - a - Bh = 0.$$

Como f es continua en x_0, esto implica que $f(x_0) = a$.

Por otra parte, eligiendo $1 \leq j \leq n$, tenemos de la hipótesis que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0+te_j) - f(x_0) - Bte_j\|}{\|te_j\|} = 0$$

es decir,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0)}{t} = Be_j.$$

Así, las derivadas parciales de las funciones coordenadas con respecto a x_j existen y son iguales a la columna j-ésima de B. De aquí $B = Df(x_0)$. En vista de la hipótesis nuevamente, tenemos que f es diferenciable en x_0.$\square$

Observación 1.13 *Este teorema dice que cuando existe una aproximación lineal de primer orden entonces hay una sola. Es un teorema de unicidad. Por otra parte este teorema es muy útil para demostrar la diferenciabilidad de una cierta función. La idea es que uno tiene una matriz B que es candidata a ser la matrix Jacobiana de f. Con dicha matriz uno demuestra (*). y concluye la diferenciabilidad.*

El siguiente es un teorema que permite combinar funciones diferenciables.

Teorema 1.8 *Sean $f, g : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$, $x_0 \in A$ y $c \in I\!R$.*
1) f es diferenciable en x_0 implica cf es diferenciable en x_0 y

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0),$$

2) f y g son diferenciables en x_0 implica
i) $f + g$ es diferenciable en x_0 y

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0),$$

ii) $f \cdot g$ es diferenciable en x_0 y

$$D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)^t Df(x_0) + f(x_0)^t Dg(x_0),$$

3) $m = 1$, f es diferenciable en x_0 y $f(x_0) \neq 0$ implica $\frac{1}{f(x)}$ es diferenciable en x_0 y

$$D(\frac{1}{f})(x_0) = -\frac{Df(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

Demostración: Sólo indicaremos brevemente como se demuestra 2) ii), el resto queda de ejercicio. Consideramos

$$\begin{aligned}
\triangle &= f \cdot g(x_0 + h) - f \cdot g(x_0) - [g(x_0)^t Df(x_0) + f(x_0)^t Dg(x_0)]h \\
&= (f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h) \cdot g(x_0 + h) \\
&\quad + f(x_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0) - Dg(x_0)h) \\
&\quad + Df(x_0)h \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0)).
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz obtenemos de aquí

$$\begin{aligned}
\frac{\|\triangle\|}{\|h\|} &\leq \|g(x_0 + h)\| \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} \\
&\quad + \|f(x_0)\| \frac{\|g(x_0 + h) - g(x_0) - Dg(x_0)\|}{\|h\|}
\end{aligned}$$

$$+\|g(x_0+h)-g(x_0)\|\|Df(x_0)\|.$$

De aquí se sigue la diferenciabilidad. Notar que estamos usando el Teorema 1.7. $\square$

Teorema 1.9 (Regla de la Cadena) *Sean $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ y $g : B \subseteq I\!R^m \to I\!R^p$ tales que f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g diferenciable en $f(x_0) \in B$. Entonces $g \circ f : A \subset I\!R^n \to I\!R^p$ es diferenciable en x_0 y*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

Demostración: Si escribimos

$$\triangle(h) = g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))Df(x_0)h,$$

entonces, gracias al Teorema 1.7 basta demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\triangle(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

De la desigualdad triangular y de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}\|\triangle(h)\| \leq\ & \|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x_0+h)-f(x_0))\| \\ & +\|Dg(f(x_0))\|\,\|(f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h)\|.\end{aligned}$$

Por otro lado, como f es diferenciable en x_0, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|Dg(f(x_0))\|}\|h\|,$$

y de aquí también obtenemos que existe $K > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leq K\|h\|.$$

Usando la deferenciabilidad de g en $f(x_0)$ encontramos que existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\|l\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(f(x_0)+l) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))l\| \leq \frac{\varepsilon}{2K}\|l\|.$$

Luego, escogiendo $\delta = min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{K}\}$, si $\|h\| < \delta$ y considerando $l = f(x_0 + h) - f(x_0)$ se tendremos

$$\|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x_0+h)-f(x_0))\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2K}\|f(x_0+h)-f(x_0)\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2K}K\|h\| = \frac{\varepsilon}{2}\|h\|.$$

Y por lo tanto

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{\|\triangle(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon.$$

La demostración requiere que $\|Dg(f(x_0))\| > 0$. Indicar cómo hacerlo cuando es cero.□

Ejemplo 1.19 (Caso Particular) *Sean $g : I\!R^3 \to I\!R$ y $f : I\!R^3 \to I\!R^3$ tal que*

$$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)).$$

Sea $F(x,y,z) = g \circ f(x,y,z) = g(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ Calculemos $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$. Para esto usemos la Regla de la Cadena para obtener $DF(x,y,z)$

$$DF(x,y,z) = Dg(f(x,y,z))Df(x,y,z) = (\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}) \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\square$$

Ejemplo 1.20 (Coordenadas Esféricas) *Sea $g : I\!R^3 \to I\!R$ y consideremos el cambio de variables a coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned} x &= rcos(\theta)sen(\phi) \\ y &= rsen(\theta)sen(\phi) \\ z &= rcos(\phi). \end{aligned}$$

Y consideremos la función $F(r,\phi,\theta) = g(rcos\theta sen\phi, rsen\theta sen\phi, rcos\theta)$ Queremos calcular las derivadas parciales de F con respecto a r, θ y ϕ.

Si miramos el cambio de variables como una función $f : I\!R^3 \to I\!R^3$, usando el ejemplo anterior se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x}cos\theta sen\phi + \frac{\partial g}{\partial y}sen\theta sen\phi + \frac{\partial g}{\partial z}cos\phi \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= \frac{\partial g}{\partial x}rcos\theta cos\phi + \frac{\partial g}{\partial y}rsen\theta cos\phi - \frac{\partial g}{\partial z}rsen\phi \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= -\frac{\partial g}{\partial x}rsen\theta sen\phi + \frac{\partial g}{\partial y}rcos\theta sen\phi.\square \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21 *Sea* $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ *donde la función* f *esta difinida por* $f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$, *y las funciones* u *y* v *por* $u(x,y) = e^{-x-y}$ *y* $v(x,y) = e^{xy}$. *Calcular* $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$. *Usando la regla de la cadena tenemos*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4uv^2}{(u^2-v^2)^2}e^{-x-y} + \frac{4vu^2}{(u^2-v^2)^2}ye^{xy}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4uv^2}{(u^2-v^2)^2}e^{-x-y} + \frac{4vu^2}{(u^2-v^2)^2}xe^{xy}$$

Ejemplo 1.22 (Importante) *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *y* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de manera que:* $h(t) = f \circ \gamma(t)$. *Entonces:*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{\gamma}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{\gamma}_3 = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma(t)}.$$

La función γ *representa una curva en el espacio y* $\dot{\gamma}$ *su vector tangente.*

Ejemplo 1.23 *Consideremos las funciones*

$$f(x,y) = (x^2+1, y^2)$$

$$g(u,v) = (u+v, u, v^2)$$

Calcular $D(g \circ f)(1,1)$. *Usemos la regla de la cadena y calculemos*

$$Dg(f(1,1))Df(1,1).$$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \quad y \text{ evaluando} \quad Df(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Evaluamos $f(1,1) = (2,1)$ *y luego calculamos*

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix},$$

que al evaluar nos da

$$Dg(f(1,1)) = Dg(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos

$$D(g\circ f)(1,1)=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&0\\0&4\end{bmatrix}.$$

Una forma alternativa, que nos da evidentemente el mismo resultado, es desarrollar h primero

$$h(x,y)=g\circ f(x,y)=(x^2+y^2+1,x^2+1,y^4)$$

y luego derivar y evaluar

$$Dh(x,y)=\begin{bmatrix}2x&2y\\2x&0\\0&4y^3\end{bmatrix}\quad \textit{entonces}\quad Dh(1,1)=\begin{bmatrix}2&2\\2&0\\0&4\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.24 (Derivación Implícita) *Sean $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que*

$$G(x,y(x))=0\qquad \forall x\in\mathbb{R}\quad \textit{entonces}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

Si $\frac{\partial G}{\partial y}\neq 0$ entonces podemos despejar la derivada de y con respecto a x

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

Observación 1.14 *Más adelante veremos que dada la ecuación*

$$G(x,y)=0$$

hay condiciones que garantizan la posibilidad de despejar y como función de x. Este criterio lo da el Teorema de la Función Implícita y consiste en suponer que $\frac{\partial G}{\partial x}$ es no nula. Notamos que justamente este término aparece en el denominador de la derivada de y.

Ejemplo 1.25 *Veamos ahora un caso de derivación implícita con más variables. Sean*

$$G_1(x,y_1(x),y_2(x))=0$$

$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$

donde $G_1, G_2 : I\!R^3 \to I\!R$ *y* $y_1, y_2 : I\!R \to I\!R$. *Suponiendo que todas las funciones involucradas son diferenciables se desea calcular* $\dot{y}_1(x)$ *e* $\dot{y}_2(x)$.

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\dot{y}_2 = 0$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial G_2}{\partial y_2}\dot{y}_2 = 0.$$

Este es un sistema de 2×2 *del cual podemos despejar las derivadas buscadas, bajo la hipótesis de invertibilidad correspondiente:*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\frac{\partial G_1}{\partial y_1}\frac{\partial G_2}{\partial y_2} - \frac{\partial G_2}{\partial y_1}\frac{\partial G_1}{\partial y_2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_2}{\partial y_2} & -\frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.26 *Vamos a demostrar que una condición necesaria y suficiente para que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

es que exista g *tal que* $f(x, y) = g(x + y)$.

La suficiencia de dicha condición es evidente. Sólo debemos chequear que la condición también es necesaria. Para esto consideremos el siguiente cambio de variables:

$$u = x + y \qquad v = x - y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{u+v}{2} \qquad y = \frac{u-v}{2},$$

y definamos

$$h(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Tendremos que

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Es decir h no depende de v, y por lo tanto:

$$f(x, y) = h(x + y).\square$$

El Teorema de Valor Medio o de los Incrementos Finitos

El Teorema del Valor Medio para funciones de un intervalo $[a, b]$ en $I\!R$ puede extenderse a varias variables. Esto hacemos a continuación.

Teorema 1.10 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R^m$ diferenciable en A y $[a,b] \subseteq A$, donde $(a,b) = \{ta + (1-t)b / t \in (0,1)\}$. Entonces*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in (a,b)} \|Df(x)\| \|b - a\|.$$

Demostración: Haremos la demostración sólo en el caso $m = 1$. Ver comentario previo a la demostración del Teorema de la Función inversa en Sección 5.1 para el caso general.

Definamos la función $g : [0,1] \to I\!R$ por

$$g(t) = f(at + (1-t)b).$$

Esta función g es derivable y por la regla de la cadena vemos que

$$g'(t) = \nabla f(ta + (1-t)b) \cdot (b - a).$$

Como la función g satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio para funciones reales podemos concluir que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0)$$

Y por lo tanto

$$f(b) - f(a) = \nabla f(at_0 + (1-t_0)b) \cdot (b - a). \qquad (*)$$

Tomando módulo y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f(b) - f(a)| \leq \|\nabla f(at_0 + (1-t_0)b)\| \, \|b - a\| \leq (\sup_{x \in [a,b]} \|\nabla f(x)\|) \|b - a\|. \qquad \square$$

Observación 1.15 *El teorema anterior también se conoce como Teorema de los Incrementos Finitos. Para una función a valores en $I\!R^m$ uno no obtiene necesariamente una igualdad como en el caso de una variable o como en (*). Esto no es problema, pues su utilidad realmente viene del hecho que los 'incrementos' se pueden acotar.*

Si uno agrega la hipótesis de que f es de clase C^1 entonces $Df(\cdot)$ es continua y como $\|\cdot\|$ también lo es $\|Df(\cdot)\|$ será composición de funciones continuas y por lo tanto continua de $I\!R$ en $I\!R$ y así alcanzará su máximo sobre un intervalo cerrado y acotado. Luego

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \max_{x \in [a,b]} \|Df(x)\| \|b - a\|.$$

1.5 Gradiente y un poquito de geometría

Recordemos que el gradiente de una función $f : A \subseteq I\!R^n \to I\!R$ se define como

$$\nabla f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots , \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)).$$

El gradiente se define generalmente sólo en puntos donde f es diferenciable, aún cuando basta que existan las derivadas parciales para determinarlo.

Ejemplo 1.27 *Calcular el gradiente de*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \nabla f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r} = \widehat{r}. \end{aligned}$$

Consideremos a continuación un vector unitario v (con $\|v\| = 1$) y miremos la función:

$$t \to f(x_0 + tv).$$

Esta es una función de una variable y uno puede preguntarse sobre su diferenciabilidad en $t = 0$, es decir sobre la existencia del límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - fx_0)}{t}.$$

Si este límite existe, decimos que f tiene *derivada en x_0, en la dirección v.* A este límite se lo anota usualmente como $Df(x_0; v)$ o $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ Un caso particular de derivada direccional son las derivadas parciales.

$Df(x_0; v)$ corresponde a la derivada de la restricción de f a la recta

$$L : x = x_0 + tv.$$

En el caso en que f es diferenciable en x_0 entonces la derivada direccional existe en cualquier dirección y se puede calcular como:

$$Df(x_0; v) = \nabla f(x_0) \cdot v.$$

Notemos que hemos considerado v unitario. Esto se hace para no distorcionar la escala espacial entre $f(x_0)$ y $f(x_0 + tv)$

Ejercicio 1.14 *Calcular la razón de cambio de la función f en la diracción $v = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ en el punto $x_0 = (1, 0, 0)$ para*

$$f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}.$$

Se pide calcular $r = \nabla f(1, 0, 0) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Para ello calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 ze^{-yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2 ye^{-yz}.$$

Evaluando obtenemos

$$\nabla f(1, 0, 0) = (2, 0, 0) \Rightarrow r = (2, 0, 0)(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

El siguiente teorema nos muestra un importante aspecto geométrico del gradiente.

Teorema 1.11 *Si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección en la cual f crece más rapidamente.*

Demostración: Sea v vector unitario, entonces la razón de cambio de f en la dirección de v es

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) \cdot v &= \|\nabla f(x_0)\| \|v\| \cos \theta \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta. \end{aligned}$$

Donde θ es el angulo entre v y $\nabla f(x_0)$). Este ángulo es *máximo* cuando v y $\nabla f(x_0)$ son paralelos.$\square$

Otro aspecto geométrico importante del gradiente viene en el estudio de superficies. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y consideremos el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \quad / \quad F(x) = k\}.$$

Este conjunto es, en general, una superficie si $n = 3$ y una hipersuperficie si $n > 3$.

El vector $\nabla F(x_0)$ es *ortogonal* a la superficie en x_0.

La idea geometrica es la siguiente: Supongamos que $c : I\!R \to I\!R^n$ es una función diferenciable, es decir es una curva suave en $I\!R^n$. Supongamos además que c está sobre S es decir:

$$F(c(t)) = k \qquad \forall t.$$

Si $c(t_0) = x_0$ entonces derivando y evaluando en x_0

$$\nabla F(x_0) \cdot c'(t_0) = 0.$$

$c'(t_0)$ es una dirección tangente a la superficie, y como c es una curva cualquiera $\nabla F(x_0)$ debe ser ortogonal al plano tangente a la superficie.

Definición 1.24 *Sea* $F : A \subseteq I\!R^n \to I\!R$ *diferenciable. Si* $F(x_0) = 0$ *,* $\nabla F(x_0) \neq 0$*, se define el* plano tangente a $S = \{x \in A \quad / \quad F(x) = k\}$ *en* x_0 *como:*

$$\nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Observación 1.16 *Ciertamente, si* $F(c(t)) = 0$ *y* $c(0) = x_0$ *entonces* $c'(t_0) + x_0$ *esta en el plano tangente.*

Se puede demostrar que si una dirección v está en el plano tangente, entonces existe c tal que $x = c'(t_0) + x_0$ Esta propiedad geométrica es muy importante y su demostración la postergaremos hasta que hayamos demostardo el Teorema de la Función Implicita, hacia el final del curso.

Ejemplo 1.28 *Encontrar el plano tangente a la superficie*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad en \quad (1, 0, 0).$$

$$\nabla F(1, 0, 0) = (2x, 2y, 2z)|_{(1,0,0)} = (2, 0, 0).$$

Entonces el plano tangente es

$$\nabla F(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y - 0, z - 0) = 0,$$

es decir

$$x = 1.\square$$

Ejemplo 1.29 *Hallar un vector normal a la superficie definida por:*

$$2xy^3z + z\ln x + y\sin y = 0$$

en $(1, 2\pi, 0)$.

Ciertamente el punto $(1, 2\pi, 0)$ está en la superficie. Para encontrar un vector normal derivamos

$$\nabla F(x, y, z) = (2y^3z + \frac{z}{x}, 6xy^2z + y\cos y + \sin y, 2xy^3 + \ln x)$$

y evaluamos en $(1, 2\pi, 0)$ para obtener

$$\nabla F(1, 2\pi, 0) = (0, 1, 2(2\pi)^3).$$

Como vimos, el gradiente $\nabla F(1, 2\pi, 0) = (0, 1, 2(2\pi)^3)$ es normal a la superficie.

Caso del grafo de una función En el caso que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hace un tiempo atrás definimos el grafo de f como:

$$G(f) = \{(x, f(x))/x \in A\} = \{(x, z)/z = f(x)\}.$$

Si definimos

$$F(x, z) = z - f(x)$$

entonces las dos definiciones de plano tangente que hemos dado son coherentes. En efecto:

$$\nabla F(x, z) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1).$$

Entonces el plano tangente queda determinado por

$$\nabla F(x, z_0)((x, z) - (x_0, z_0)) = 0,$$

es decir,

$$-\nabla f(x_0)(x - x_0) + (z - z_0) = 0,$$

o sea, $z = z_0 + \nabla f(x_0)(x - x_0)$. Notar bien que el vector $(-\nabla f(x_0), 1)$ es ortogonal al grafo de f en $(x_0, f(x_0))$

Ejemplo 1.30 *Encontrar el plano tangente al grafo de la función:*

$$f(x,y,z,t) = xe^{yt} + \cos zt$$

en $(3,0,0,3)$.

Tenemos que $f(3,0,0,3) = 3 + 1 = 4$. Además, derivando obtenemos $\nabla f(x,y,z,t) = (e^{yt}, xte^{yt}, -t\sin zt, xye^{yt} - z\sin zt)$ y evaluando $\nabla f(3,0,0,3) = (1,9,0,0)$. En consecuencia el plano tangente es

$$w - 4 = 1\cdot(x-3) + 9(y-0) + 0(z-0) + 0(t-3)$$

y simplificando
$w - 4 = x - 3 + 9y \qquad \text{o} \qquad 9y + x - w = -1.$

Ejemplo 1.31 *Hallar un vector unitario, normal a la superficie S dada por*

$$z = x^2y^2 + y + 1,$$

en $(0,0,1)$.

$F = z - x^2y^2 - y - 1 = 0$ y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2xy^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2y - 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Evaluando en $(0,0,1)$ obtenemos $\nabla F(0,0,1) = (0,-1,1)$ y de aquí $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ es normal unitario.

EJERCICIOS

P1) Sean $x_0, x_1, ..., x_{n-1} I\!\!R^n$ tales que $x_1 - x_0, ..., x_{n-1} - x_0$ son linealmente independientes. Probar que existe exactamente un hiperplano conteniendo a $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$.

P2) i) Demuestre que si $\vec{x}$ es un vector cualquiera de $I\!\!R^n$ y si $\vec{d}$ es un vector unitario, entonces $\vec{x} = y + z$, donde y es un múltiplo de $\vec{d}$ y z es perpendicular a $\vec{d}$.
ii) Demuestre que los vectores y y z de la parte i) están determinados unívocamente.

P3) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. a)Pruebe que existen vectores $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{x} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ind: Piense en los valores y vectores propios de A.
b)Pruebe usando lo anterior que $\|A\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|$.

P4) Sea f definida por la siguiente fórmula:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \text{ si } (x_1, x_2) \neq 0 \text{ y } f(0,0) = 0.$$

a) Encuentre el conjunto donde se puede definir f, es decir $Dom f$, grafique.
b) Determine las curvas de nivel de f.
c) Determine si f es continua en $(0,0)$. **P5)** Encuentre los conjuntos de nivel

para las siguientes funciones (para los niveles que se indican).
a) $f(x,y) = x + y$ para $f(x,y) = 1$.
b) $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ para $f(x,y) = 0$.
c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1 + x_2)$ para $f(x_1, x_2, x_3) = (0,1)$. **P6)** Determine

si las siguientes funciones admiten límite en los puntos que se indican:
a) $f(x,y) = 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
b) $f(x,y) = \frac{senx - seny}{x-y}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.

P7) Sean $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tres funciones continuas. Se define la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,y) = h(f(x,y), g(x,y)).$$

Demuestre que F es continua.

P8) Estudie la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_1+x_2} & \text{si } x_1 + x_2 \neq 0 \\ 1 & \text{si } x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \ell n(x_1^3 x_2 + x_3) + sen(x_3^2 + x_1)$.

P9) Sea $L : I\!R^n \to I\!R^m$ una función lineal
a) Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:
1) L es continua en todo punto de $I\!R^n$.
2) L es continua en 0.d
3) $\|L(x)\|$ es acotada si $x \in \bar{B}(0,1)$, la bola unitaria.
b) Demuestre que toda función lineal de $I\!R^n$ en $I\!R^m$ es continua.

P10) a) Sea $A \in I\!R^n$. Pruebe que:
i) $adh(A)$ es un conjunto cerrado.
ii) $int(A)$ es un conjunto abierto. En realdidad $adh(A)$ es el cerrado más pequeño que contiene a A. Y a su vez $int(A)$ es el abierto más grande contenido en A.

b) Pruebe que en general no se tiene que $int(adh(A)) = A$. Para esto siga los siguientes pasos:
i) Pruebe que $adh(I\!\!\!Q) = I\!R$.
ii) Pruebe que $int(I\!R) = I\!R$
iii) Concluya.

P11) Sea $f : I\!R^n \to I\!R^m$. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:
a) f es continua en todo punto de $I\!R^n$.
b) $(\forall A \subseteq I\!R^m$ abierto) $f^{-1}(A)$ es abierto en $I\!R^n$.
c) $(\forall B \subseteq I\!R^m$ cerrado) $f^{-1}(A)$ es cerrado en $I\!R^n$.
Ind: Para la segunda pruebe antes que: $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

P12) Encontrar todas las derivadas parciales para las funciones $f(x,y) = (e^x cosy, e^x seny)$ y $f(x,y) = log_x y$.

P13) Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ continua y diferenciable. Sea $G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x}))/\vec{x} \in Dom f\}$ el grafo de f. Sea $F : I\!R^3 \to I\!R$ tal que $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.
a) Muestre que G_f corresponde a un conjunto de nivel de F.
b) Demuestre que $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$.
c) Encuentre el vector normal y el plano tangente a G_f cuando $f(x,y) = xy + ye^x$ en el punto $(1,1)$.

P14) Sea $f(u,v) = (u\cos v, u\text{sen}v)$, con $-\pi/2 < v < \pi/2$ y $g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, artan(y/x))$ para $x > 0$.
i) Encontrar $D(g \circ f)(u,v)$ y $D(f \circ g)(x,y)$.

ii) Determinar si $Dom f = Dom(g \circ f)$, y si $Dom g = Dom(g \circ f)$.

P15) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| = 1\}$. Sea $g : S \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$g(1,0) = g(0,1) = 0 \text{ y } g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g(\frac{x}{\|x\|}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Dado $a \in \mathbb{R}^2$ demuestre que la función $h(t) = f(at), t \in \mathbb{R}$ es diferenciable.
b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

P16) Encontrar el gradiente ∇f en cada uno de los siguientes casos.
a) $f(x,y) = x^2 - y^2 \text{sen} y$ en (a,b).
b) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^\alpha, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

P17) a) Si $g(x,y) = e^{x+y}, f'(0) = (1,2)$, encontrar $F'(0)$ donde $F(t) = g(f(t))$ $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$ y $f(0) = (1,-1)$.
b) Si $f(x,y,z) = senx, F(t) = (cost, sent, t)$, encontrar $g'(\pi)$ donde $g(t) = f(F(t))$.

P18) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, tal que sus componentes ϕ_1, y ϕ_2 verifican

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}.$$

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f = h \circ \phi$. Demuestre que

$$\langle \nabla f(x,y), \nabla \phi_1(x,y) \rangle = \frac{\partial h}{\partial u}(\phi(x,y)) \cdot \|\nabla \phi_1(x,y)\|^2.$$

P19) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) sen \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcular $\nabla f(0,0)$.
b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.
c) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0,0)$.

P20)i) Hallar la ecuación para el plano tangente a cada superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado:
a) $z = x^3 + y^3 - 6xy, (1,2,-3)$.
b) $z = (cosx)(seny), (0, \pi/2, 1)$
ii) Calcular para los siguientes casos la dirección de mayor crecimiento en $(1,1,1)$.
a) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$
b) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

P21) Sean f y g funciones de $I\!R^3 \to I\!R$. Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(x) = g(x) \cdot x$. Mostrar que f es constante para las esferas centradas en el origen.

P22) Una función $u = f(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama función armónica. Determinar cuales de las siguientes funciones son armónicas.
a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$
b) $u(x,y) = senxcoshy$
c) $u(x,y) = e^x seny$.

P23) a) Si $g(x,y) = e^{x+y}, f'(0) = (1,2)$, encontrar $F'(0)$ donde $F(t) = g(f(t))$ $(f : I\!R \to I\!R^2)$ y $f(0) = (1,-1)$.
b) Si $f(x,y,z) = senx, F(t) = (cost, sent, t)$, encontrar $g'(\pi)$ donde $g(t) = f(F(t))$.

Capítulo 2

Derivadas de orden superior

2.1 Derivadas Superiores y Teorema de Taylor

Sea $f : A \subseteq I\!\!R^n \to I\!\!R$ una función diferenciable en A, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \subset I\!\!R^n \to I\!\!R$$

define una función. Como tal esta función puede tener derivadas parciales y también ser diferenciable. Cuando $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tiene derivada parcial con respecto a x_j en x_0, ésta la anotamos como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Ejemplo 2.1 *Calcular* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *si*

$$f(x, y) = ln(x^2 + y^2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pero también podemos calcular

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Notemos que en este caso $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Esto no es sólo coincidencia como veremos en más adelante.

También podemos observar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Por esta razón la función f se dice armónia. La combinacion

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

se conoce como el Laplaciano de f.$\square$

Recordemos que f se dice de clase C^1 en un domonio A si f es diferenciable en A y todas sus derivadas parciales son continuas en A.

Definición 2.1 *f se dirá dos veces diferenciables en x_0 si f es diferenciable en una vecindad de x_0 y todas sus derivadas parciales son diferenciables en x_0. f se dirá de clase C^2 en A si todas sus segundas derivadas parciales son continuas en A.*

Es fácil extender estas definiciones a órdenes superiores.

A continuación veremos uno de los resultados más importantes de esta sección que dice relación con la posibilidad de intercambiar el orden de las derivadas

Teorema 2.1 (Teorema de Schwarz) *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en A. Si las segundas derivadas parciales son continuas en $x_0 \in A$ entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \qquad \forall i, j = 1, \cdots, n.$$

Demostración: Una pequeña reflexión lleva a concluir que basta estudiar el $n = 2$. Dado $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in A$ y $h = (h_1, h_2) \in I\!R^2$, $\|h\| < r$, definimos $F : B(0, r) \to I\!R$ de la siguiente forma

$$F(h_1, h_2) =$$
$$[f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01} + h_1, x_{02})] - [f(x_{01}, x_{02} + h_2) - f(x_{01}, x_{02})].$$

Notemos que F queda bien definida para r pequeño. Sea $g(t) = f(t, x_{02} + h_2) - f(t, x_{02})$. Entonces por el Teorema del Valor Medio existe h'_1 tal que $|h'_1| < \|h\|$ y

$$F(h_1, h_2) = g(x_{01} + h_1) - g(x_{01}) = g'(x_{01} + h'_1)h_1$$

y entonces

$$F(h_1, h_2) = [\frac{\partial f}{\partial x}(x_{01} + h'_1, x_{02} + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_{01} + h'_1, x_{02})]h_1$$

Usando nuevamente el Teorema del Valor Medio encontramos h'_2 tal que $|h'_2| < |h_2| \leq \|h\|$ y entonces

$$\frac{F(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_{01} + h'_1, x_{02} + h'_2).$$

Pero uno también puede escribir F de la siguiente manera

$$F(h_1, h_2) =$$
$$[f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01}, x_{02} + h_2)] - [f(x_{01} + h_1, x_{02}) - f(x_{01}, x_{02})],$$

y podemos repetir la misma aplicación del Teorema del Valor Medio para probar que

$$\frac{F(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{01} + h''_1, x_{02} + h''_2)$$

con $|h''_1| < |h_1|$ y $|h''_2| < |h_2|$. Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_{01} + h'_1, x_{02} + h'_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{01} + h''_1, x_{02} + h''_2),$$

y finalmente, por la continuidad de las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0). \qquad \square$$

Ejemplo 2.2 *El siguiente ejemplo nos muestra que las derivadas cruzadas pueden ser distintas. Consideremos la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

En todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

y en $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$$

De aquí tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4+4y^2x^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^5}{y^4}}{y} = -1.$$

Por otro lado, y de manera análoga, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{-x(y^4+4y^4x^4-x^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y de aquí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

¿Cómo se interpreta esto a la luz del Teorema? Estudiemos la continuidad de las derivadas cruzadas

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y^5}{y^4}) = \lim_{x\to 0} -1 = -1.$$

y sin embargo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8} = 1,$$

es decir, hay discontinuidad en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.□

Corolario 2.1 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k con $k \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \partial x_{\sigma(i_2)} \cdots \partial x_{\sigma(i_k)}}$$

Donde $i_1, i_2, \cdots i_k \in \{1, \cdots, n\}$ y $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ es una permutación cualquiera.

Demostración: Basta aplicar el teorema de intercambio de derivadas reiterativamente □.

Ejercicio 2.1 *Considere la funcón $f(x,y) = x^3 y + sen(x^2 y)$ y verifique que*

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial^2 y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial^2 y \partial^2 x}.$$

Ahora que ya conocemos las derivadas de mayor orden y sus principales propiedades estamos preparados para estudiar los desarrollos de Taylor en varias variables. Recordemos el caso de una variable, en el cual vamos a basar nuestro argumento para varias variables.

Cuando $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ y f es derivable en x_0 entonces se tiene que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x_0, x - x_0),$$

donde

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x_0, x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Esta no es más que la definición de derivada y la fórmula se conoce como la fórmula de aproximación de f al primer orden. El término $R_1(x_0, x - x_0)$ se denomina resto. Cuando f es dos veces derivable uno puede dar una expresión para R_1 en términos de una integral. En efecto, del Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

e integrando por partes ($u = f'(t), v = t - x$) obtenemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)f''(t)dt.$$

Asíobtenemos la *Fórmula integral del Resto*

$$R_1(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} (x - t)f''(t)dt.$$

Si uno supone que f es k veces derivable en x_0, entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_k(x, x_0),$$

donde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_k(x, x_0)}{|x - x_0|^k} = 0.$$

Cuando se supone además que f es de clase C^{k+1} en una vecindad de x_0 entonces integrando por partes reiteradamente se obtiene la fórmula integral para el resto de orden k

$$R_k(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Si consideramos

$$M = \max_{t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f^{(k+1)}(t)| \quad \text{para} \quad 0 < \delta < |x|$$

entonces

$$|R_k(x, x_0)| \leq M| \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^k}{k!} dt| = \frac{M}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}.$$

Cuando $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ también podemos establecer un teorema de Taylor. Notamos que en caso que f tome valores en $\mathbb{R}^m$ lo que diremos se aplica a cada coordenada. Comenzamos con una definición

Definición 2.2 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $x_0 \in A$. Se define entonces la matriz Hessiana de f en x_0 como*

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Observación 2.1 *Notamos que, por el teorema anterior, si f es de clase C^2 en una vecindad de x_0 entonces la matriz Hessiana de f en x_0 es simétrica.*

Teorema 2.2 (Teorema de Taylor de 2 orden) *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3. Entonces*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^t Hf(x_0)h + R_2(x_0, h),$$

donde el resto $R_2(x_0, h)$ tiene una expresión integral y $|R_2(x_0, h)| \leq M\|h\|^3$. Así que en particular

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Observación 2.2 *Se puede demostrar que si f es de clase C^2 entonces también se tiene que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{\|h\|^2} = 0,$$

aunque la fórmula integral del resto no se tiene.

Demostración: Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dt}f(x_0 + th) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)h_i$$

e integrando entre 0 y 1

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)h_i dt.$$

Utilizando nuevamente de la cadena obtenemos para $u = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)h_i$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + th)h_j h_i.$$

Integrando por partes, considerando u como arriba y $v = t - 1$

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+th)h_i h_j dt,$$

que es un resultado intermedio correspondiente a la Fórmula de Taylor de Primer orden

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + R_1(x_0,h).$$

Integrando nuevamente por partes, con $v = -(t-1)^2/2$ y $u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + th)h_i h_j$ con lo cual

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0+th)h_i h_j h_k.$$

Obtenemos

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j + R_2(x_0,h),$$

donde el resto tiene la forma integral

$$R_2(x_0,h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0+th)h_i h_j h_k dt.$$

Como $\frac{\partial f^3}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ son continuas en x_0, existe $\delta > 0$ y $M > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0+th)| \leq M.$$

La constante M puede tomarse como

$$M = \max_{i,j,k}\{\max_{x\in B(x_0,\delta)} |\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x)|\}.$$

Por lo que, para todo $t \in [0,1]$ tenemos

$$|\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0+th)h_i h_j h_k| \leq M|h_i|\ |h_j|\ |h_k|.$$

Y finalmente

$$|R_2(x_0,h)| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3!}M\|h\|^3 = (\frac{n^3}{3!}M)\|h\|^3. \qquad \square$$

Ejercicio 2.2 *Escribir la fórmula general de Taylor de orden 3.*

Ejercicio 2.3 *Mejore la cota para el error a*

$$|R_2(x_0, h)| \leq (\frac{n^{3/2}}{3!} M)\|h\|^3.$$

Ejemplo 2.3 *Encontrar la fórmula de Taylor de orden 2 en torno a* $x_0 = (0, 0)$ *para*

$$f(x, y) = \sin(x + 2y) + x^2.$$

Evaluamos $f(0, 0) = 0$. Después calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x + 2y) + 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\cos(x + 2y)$$

y evaluamos $\nabla f(0, 0) = (1, 2)$. Ahora calculamos las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+2y)+2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2\sin(x+2y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\sin(x+2y)$$

y evaluamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0.$$

Considerando $h = (h_1, h_2)$ tenemos finalmente

$$f(x_0 + h) = f(h_1, h_2) = f(0, 0) + (1, 2)(h_1, h_2) + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + R_2$$

$$= h_1 + 2h_2 + h_1^2 + R_2(0, h).\square$$

Continuando con este ejemplo, sabemos que la función $P_2(h_1, h_2) = h_1+2h_2+h_1^2$ aproxima a $f(h_1, h_2)$ al segundo orden, en el sentido que $\frac{R_2(0,h)}{\|h\|^2} \to 0$. Pero uno podría hacer una pregunta más específica:

si $\|h\| \leq 1/4$ ¿Qué error se comete por cambiar f y P_2 ?

Tenemos la fórmula integral del error

$$R_2(h_1,h_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^1\frac{(1-t)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_jh_k dt.$$

Usando el Teorema del Valor Medio integral vemos que existen $t_{ijk}\in[0,1]$ tales que

$$R_2(h_1,h_2)=\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0+t_{ijk}h)h_ih_jh_k,$$

de donde podemos hacer nuestra estimación. En nuestro caso calculemos las terceras derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}&=-\cos(x+2y),\\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}&=-2\cos(x+2y),\\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}&=-4\cos(x+2y),\\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}&=-8\cos(x+2y).\end{aligned}$$

Evaluando las derivadas en $x_0=(0,0)$ obtenemos

$$\begin{aligned}|R_2(h_1,h_2)| &\leq \frac{1}{3!}(h_1^3+3\cdot 2h_1^2h_2+3\cdot 4h_1h_2^2+8h_2^3)\\ &\leq \frac{1}{3!}(1+6+12+8)\|h\|^3=\frac{27}{6}\|h\|^3, \qquad |h_i|\leq\|h\|.\end{aligned}$$

Así, si $\|h\|\leq 1/4$ entonces $|R_2(h_1,h_2)|\leq 9/(2\cdot 4^3)$.

Ejercicio 2.4 *Demostrar que si f es de clase C^2 entonces*

$$f(x_0)+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\frac{1}{2}h^tHf(x_0)h+R_2(x_0,h)$$

donde

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2}=0$$

EJERCICIOS

P1) Una función $u = f(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama función armónica. Determinar cuales de las siguientes funciones son armónicas.
a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
b) $u(x, y) = senxcoshy$
c) $u(x, y) = e^x seny$.

P2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para cada x defina $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x, y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g_x'(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ tal y y se supone que es diferenciable demostrar:
a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) entonces:

$$c'(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}.$$

b) Si $c'(x) = 0$, entonces existe un $\bar{y}$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \bar{y}) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0.$$

P3) Calcular la expansión de Taylor de segundo orden de las funciones siguientes en los puntos señalados, y calcule una vecindad en torno al punto tal que la aproximación tenga un error de a lo más 10^{-2}.
a) $f(x, y, z) = (x^2 + 2xy + y^2)e^z$ en $\vec{x_o} = \{(1, 2, 0), (3, 2, 5)\}$.
b) $f(x, y, z) = (x^3 + 3x^2y + y^3)e^{-z^2}$ en $\vec{x_o} = \{(0, 0, 0), (3, 2, 3)\}$.
c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \log(\cos(x_1 + x_2 - x_3 - x_4))$ en $\vec{x_o} = \vec{0}$.

P4) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞. Pruebe que en general no se tiene que la serie de Taylor de f converge a f. Para esto considere como contraejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que es C^∞ y estudie su serie de Taylor en torno a cero.

2.2 Extremos de funciones con valores reales

Dentro de los puntos que pertenecen al dominio de la función, aquellos en donde esta alcanza un mínimo o un máximo revisten un especial interés por su importancia en muchos problemas prácticos.

Definición 1 *Sea $f : U \longrightarrow \Re$ con U un subconjunto abierto de $\Re^n$. Un punto $x_0 \in U$ se dirá mínimo (máximo) local de f si existe una vecindad V de x_0 tal que*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V \qquad (f(x) \leq f(x_0))$$

Un punto se dirá extremo local si es un mínimo o un máximo local. Un punto x_0 se dirá *crítico* de f si $Df(x_0) = 0$.

Teorema 2 *Sea $f : U \longrightarrow \Re$ diferenciable, con U un subconjunto abierto de $\Re^n$ y $x_0 \in U$ un extremo local, entonces $Df(x_0) = 0$.*

Demostración. Si f tiene un mínimo local x_0 entonces si definimos la función de una variable

$$g(t) = f(x_0 + th)$$

donde $h \in \Re^n$ es un punto cualquiera se tendría que g tiene un mínimo local en $t = 0$ pues

$$g(t) = f(x_0 + th) \geq f(x_0) = g(0)$$

y por tanto $g'(0) = 0$ lo que implica que

$$Df(x_0)h = 0$$

y como esto es para cualquier h entonces se tiene que $Df(x_0) = 0$. ■

Observemos que $Df(x_0) = 0$ es equivalente a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

en otras palabras, los máximos y mínimos son puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Df(x) = 0$$

Este es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Pero en general no es un sistema lineal.

Ejemplo 3 *Busque los puntos críticos de la siguiente función y clasifíquelos:*

$$f(x,y) = x^2y + y^2x$$

El sistema de ecuaciones que se obtiene es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0$$

de donde se tiene

$$y(2x+y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ ó/y } y = -2x$$
$$x(2y+x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ó/y } x = -2y$$

de la primera relación vemos que los posibles puntos extremos son $(0,0)$ *y* $(a,-2a),\ a \in \Re$ *mientras que de la otra se tiene que son* $(0,0)$ *y* $(-2b,b),\ b \in \Re$*, pero como se tienen que cumplir ambas relaciomnes a la vez entonces el único punto crítico es el* $(0,0)$*. Por otro lado, haciendo* $x = y$ *se tiene que* $f(x,x) = 2x^3$ *el cual toma valores positivos y negativos, es decir* $(0,0)$ *no es ni máximo ni mínimo.*

Veamos ahora condiciones necesarias de 2^{do} orden equivalentes a las vistas en el caso de funciones de una variable, es decir, $f''(x) > 0$ para mínimo y $f''(x) < 0$ para máximo.

Definición 4 *Sea* $f : U \longrightarrow \Re$ *con* U *un subconjunto abierto de* $\Re^n$ *con derivadas de* 2^{do} *orden*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

en x_0*. El Hessiano de* f *en* x_0 *es la función cuadrática definida por*

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$$

Otra forma de escribir la expresión anterior es

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} H h$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

La matriz H se denomina *matriz Hessiana* de la función f.

Observemos que esta matriz es simétrica ya que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Antes de dar el criterio de 2^{do} orden, recordemos algunos elementos de algebra lineal.

Si A es una matriz simétrica, entonces A es diagonalizable, es decir, existe una matriz P tal que

$$A = PDP^{\mathrm{T}} \tag{2.1}$$

donde P es una matriz invertible (ortogonal) y D es una matriz diagonal, es decir:

$$P^{\mathrm{T}}P = I$$

donde I es la matriz identidad y

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

De (2.1) tenemos que

$$AP = PD$$

y por columna

$$Ap_i = \lambda_i p_i$$

donde p_i representa la i-ésima columna de P. Los λ_i son los valores propios de la matriz A mientras que los p_i son vectores propios correspondientes a dichos valores propios.

Una matriz A se dice *definida positiva* si

$$x^{\mathrm{T}}Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Si además es simétrica, usando la diagonalización vista anteriormente, tenemos que

$$x^{\mathrm{T}}PDP^{\mathrm{T}}x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

o sea (haciendo $P^{\mathrm{T}}x = y$)

$$y^{\mathrm{T}}Dy > 0 \quad \forall y \neq 0$$

$$\Longrightarrow \sum \lambda_i y_i^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$$

y de aqui se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5 *Una matriz A es definida positiva si y solo si los valores propios de A son positivos.*

Corolario 6 *Si A es definida positiva entonces existe $c > 0$ tal que*

$$x^{\mathrm{T}}Ax \geq c\,\|x\|^2 \quad \forall x \in \Re^n$$

en realidad, $c = \min\{\lambda_i \mid i = 1, ..., n\}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}Ax &= \sum \lambda_i y_i^2 \\ &\geq \min\{\lambda_i \mid i = 1, ..., n\}\,\|y\|^2 \\ &= c\,\|P^{\mathrm{T}}x\|^2 \\ &= cx^{\mathrm{T}}PP^{\mathrm{T}}x \text{ , recordemos que } PP^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}P = I \\ &= c\,\|x\|^2 \end{aligned}$$

■

También se habla de matriz *semi-definida positiva* cuando se satisface

$$x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$$

Teorema 7 *Una matriz A es semi-definida positiva si y solo si los valores propios de A son positivos o nulos.*

Observación 8 *De las definiciones vistas hasta ahora de matrices definidas y semi-definidas positivas, haciendo los cambios de desigualdad correspondientes, se obtienen las definiciones de matrices definidas y semi-definidas negativas.*

Observación 9 *Existen muchos criterios para determinar si una matriz es definida positiva o no, uno de los usados por su fácil comprobación es el siguiente: Una matriz B cuadrada $(n \times n)$ es definida positiva si y solo si todas las submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal tienen determinantes positivos. Para el caso de las matrices definidas negativas los signos de los determinantes deben alternarse, comenzando con negativo.*

Teorema 10 (Criterio de 2^{do} orden) *Sea $f : U \longrightarrow \Re$ con U un subconjunto abierto de $\Re^n$ y f de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $x_0 \in U$ un punto crítico de f.*

Si $Hf(x_0)$ es definida positiva entonces x_0 es un mínimo lacal de f.

Si $Hf(x_0)$ es definida negativa entonces x_0 es un máximo local de f.

Demostración. Demostremos solamente la primera parte, la otra se demuestra de forma similar.

Si x_0 es punto crítico, entonces usando el Teorema de Taylor de orden 2 se tiene que:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Hf(x_0)(h) + R_2(h, x_0)$$

donde $R_2(h, x_0) \longrightarrow 0$ cuando $h \longrightarrow 0$.

Como $Hf(x_0)$ es definida positiva entonces existe $c > 0$ tal que

$$Hf(x_0)(h) \geq c \|h\|^2 \quad \forall h \in \Re^n$$

y como $R_2(h, x_0) \longrightarrow 0$ cuando $h \longrightarrow 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| < \delta$ entonces

$$|R_2(h, x_0)| < c \|h\|^2$$

y por tanto

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > c \|h\|^2 - c \|h\|^2 = 0$$

para todo $0 < \|h\| < \delta$, lo que implica que x_0 es un mínimo local. ■

Ejemplo 11 *Encuentre los puntos críticos de la siguiente función y clasifíquelos.*

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} 2y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

y por tanto el único punto crítico es $(x, y) = (0, 0)$*. Veamos ahora la Hessiana de la función* f *evaluada en este punto:*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{-x^2 + y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\right|_{(0,0)} = 2$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\right|_{(0,0)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{x^2 - y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\right|_{(0,0)} = 2$$

es decir, la matríz Hessiana queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la cual trivialmente se ve que es definida positiva y por tanto el punto $(0, 0)$ *es un mínimo local estricto.*

2.3 Funciones Convexas

Definición 2.3 *Un conjunto* $A \subset I\!R^n$ *se dice convexo si*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \quad \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Si A *es un conjunto convexo, una función* $f : A \to I\!R$ *se dice convexa si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1].$$

La función f *se dice estrictamente convexa si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in A, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Observamos que las funciones lineales son convexas, pero no son estrictamente convexas.

Dada $f : A \to I\!R$, definamos

$$m = \inf_{x \in A} f(x),$$

y supongamos que m es finito. Entonces tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.3 *Si $M(f) = \{x \in A \,/\, f(x) = m\}$ y $M(f) \neq \emptyset$ tenemos:*

i) Si f es convexa entonces $M(f)$ es convexo.

ii) Si f es estrictamente convexa entonces $M(f)$ es un singleton.

Demostración: Si $x, y \in M(f)$ entonces

$$m \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = m,$$

o sea, $\lambda x + (1-\lambda)y \in M(f)$.

Si f es estrictamente convexa no podemos tener $x \neq y$ en $M(f)$. $\square$

El resto de la sección la dedicaremos a caracterizar las funciones convexas diferenciables y las convexas dos veces diferenciables.

Teorema 2.4 *Sea A un conjunto abierto y convexo, y sea $f : A \to I\!R$ una función diferenciable en A. Entonces tenemos*

i) f es convexa si y sólo si $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \quad \forall x, y \in A$.

ii) f es estrictamente si y sólo si $f(x) > f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \quad \forall x, y \in A$.

Demostración: i) Supongamos que f es convexa, entonces para $x, y \in A$ y $\lambda \in (0,1)$ se tiene

$$\frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y).$$

Tomando límite cuando $\lambda \to 0$ se obtiene

$$\nabla f(y) \cdot (x-y) \leq f(x) - f(y).$$

Recíprocamente, para $x, y \in A$ y $\lambda \in (0,1)$ sea $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Entonces

$$\nabla f(z) \cdot (x-z) \leq f(x) - f(z)$$

y

$$\nabla f(z) \cdot (y-z) \leq f(y) - f(z).$$

Multiplicando la primera por λ y la segunda por $1-\lambda$, y sumando obtenemos

$$0 \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(z),$$

es decir,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

ii) Supongamos que f es estrictamente convexa, entonces

$$f(y + \lambda(x-y)) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

entonces, para $\lambda > 0$, tenemos

$$f(y + \lambda(x-y)) - f(y) < \lambda(f(x) - f(y)).$$

Pero de la parte i) obtenemos que el lado izquierdo satisface

$$f(y + \lambda(x-y)) - f(y) \geq \nabla f(y) \cdot (x-y),$$

Obteniéndose el resultado. La recíproca se demuestra exactamente como en i). $\square$

Corolario 2.2 *i) f es convexa si y sólo si*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \quad \forall x, y \in A.$$

ii) f es estrictamente convexa si y sólo si

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) > 0 \quad \forall x, y \in A.$$

Demostración: Si f es convexa entonces, para $x, y \in A$ tenemos

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y)$$

y

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y-x).$$

Sumando obtenemos que

$$0 \geq (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (x-y).$$

Para la desigualdad estricta en ii) hacemos exactamente lo mismo.

Recíprocamente, consideremos el Teorema Fundamental del Cálculo

$$f(x) = f(y) + \int_0^1 \nabla f(\lambda x + (1-\lambda)y) \cdot (x-y) d\lambda.$$

De la hipótesis tenemos que

$$(\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \nabla f(x)) \cdot (1-\lambda)(x-y)$$

y entonces

$$\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)y) \cdot (x-y) \leq \nabla f(x) \cdot (x-y).$$

Reemplazando esto en la expresión de arriba y ordenando obtenemos entonces

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y-x).$$

La desigualdad estricta se obtiene de igual modo. $\square$

Finalmente tenemos

Teorema 2.5 *Si f es de clase $C^2(A)$ entonces*

i) f es convexa en A si y sólo si $D^2 f(x)$ es semi-definida positiva en todo A.

ii) f es estrictamente convexa en A si $D^2 f(x)$ es definida positiva en todo A.

Demostración: Del Teorema Fundamental del Cálculo podemos escribir

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x + \lambda(y-x))}{\partial x_j \partial x_i} (y_j - x_j) d\lambda,$$

entonces

$$(\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (y-x) = \int_0^1 (y-x)^t D^2 f(x + \lambda(y-x))(y-x) d\lambda.$$

De aquí se obtiene la convexidad (estricta convexidad), cuando se supone la semi-positividad (positividad) de la segunda derivada.

Para la recíproca en i) consideramos $y - x = sh$ para obtener

$$\int_0^1 h^t D^2 f(x + s\lambda h) h d\lambda \geq 0.$$

Tomando límite, cuando $s \to 0$ obtenemos

$$h^t D^2 f(x) h \geq 0. \quad \square$$

2.4 Extremos restringidos.

Veamos ahora qué sucede cuando queremos mínimizar o máximizar una función sujeta a ciertas restricciones.

Teorema 12 (Multiplicadores de Lagrange) *Sean* $f : U \subset \Re^n \longrightarrow \Re$ *y* $g : U \subset \Re^n \longrightarrow \Re$ *funciones diferenciables de clase* C^1*. Sea* $x_0 \in U$ *y* $g(x_0) = c$*, y sea* S *el conjunto de nivel para* g *con valor* c*, es decir*

$$S = \{x \in U \mid g(x) = c\}$$

Supongamos que $\nabla g(x_0) \neq 0$*. Si* $f|_S$ *(*f *restringida a* S*) tiene un mínimo o máximo local en* S *en* x_0*, o equivalentemente, si* x_0 *es una solución del problema:*

$$\begin{array}{lcl} \min f(x) & \quad ó \quad & \max f(x) \\ g(x) = c & & g(x) = c \end{array}$$

entonces existe un número real λ *tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Demostración. Supongamos que x_0 es solución del problema de minimización (el otro caso es similar) y sea

$$S = \{x \in U \mid g(x) = c\}$$

Como $\nabla g(x_0) \neq 0$, entonces este vector es normal a la superficie S, por otro lado, el plano tangente a S en x_0 se caracteriza como

$$\pi : \quad \nabla g(x_0)^{\mathrm{T}} \cdot (x - x_0) = 0$$

o equivalentemente

$$\pi = \{\sigma'(0) \mid \sigma : \Re \longrightarrow U,\ \sigma(t) \in S \quad \forall t,\ \sigma(0) = x_0\}$$

Entonces, siendo x_0 un mínimo de f, la función $t \longmapsto f(\sigma(t))$ tiene un mínimo en 0 para cada σ, por tanto

$$\nabla f(x_0)^{\mathrm{T}} \cdot \sigma'(0) = 0$$

es decir, $\nabla f(x_0)$ es ortogonal al plano tangente o lo que es lo mismo, paralelo al vector $\nabla g(x_0)$. Por lo tanto, existe un real λ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

■

El número λ se le llama *multiplicador de Lagrange* y a la función de $n+1$ variables

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

se le conoce como *Lagrangeano*. Observemos que la condición (necesaria) del Teorema es equivalente a

$$\begin{array}{l} \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \\ g(x_1, ..., x_n) = c \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ g(x_1, ..., x_n) = c \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Corolario 13 *Si f al restringirse a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo en x_0, entonces $\nabla f(x_0)$ es perpendicular a S en x_0.*

Ejemplo 14 *Sea $S \subset \Re^2$ la recta que pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene una inclinación de $45°$ y sea $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ tal que $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Hallar los extremos de f sobre la recta S.*

Veamos que S se puede escribir como

$$S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$$

y denotemos por (x_0, y_0) el posible candidato a ser extremo y $g(x, y) = y - x - 1$, $c = 0$. Por otro lado, se tiene

$$\begin{array}{l} \nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0) \\ \nabla g(x_0, y_0) = (-1, 1) \end{array}$$

y por tanto, aplicando el sistema lagrangeano (2.2) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_0 = -\lambda \\ 2y_0 = \lambda \\ y_0 = x_0 + 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} x_0 = -y_0 \\ y_0 = x_0 + 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{array}$$

es decir, el extremo de f es $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y el valor del multiplicador de lagrange es $\lambda = 1$.

Ejemplo 15 *Resuelva el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} &\min x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

En general, para poder determinar si los puntos extremos son mínimos locales, máximos o puntos sillas debemos analizar el comportamiento de la 2^{da} derivada como veremos más adelante, u otros argumentos.

Supongamos ahora que tenemos k restricciones de igualdad, es decir

$$S = \{x \in \Re^n \mid g_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., g_k(x_1, ..., x_n) = 0\}$$

y el problema de optimización es:

$$\begin{array}{lcl} \min f(x) & \text{ó} & \max f(x) \\ x \in S & & x \in S \end{array} \tag{2.3}$$

donde $f, g_i : \Re^n \longrightarrow \Re$, $i = 1, ..., k$, son funciones diferenciables.

Entonces el Teorema de multiplicadores de Lagrange se extiende de la siguiente forma:

Teorema 16 *Si los problemas (2.3) tienen un mínimo o máximo local x_0, es decir, existe una vecindad V de x_0 tal que:*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V \cap S \qquad (\text{ó } f(x) \leq f(x_0))$$

entonces existe k números reales (multiplicadores) $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tales que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + ... + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

siempre que los vectores $\nabla g_1(x_0), ..., \nabla g_k(x_0)$ sean linealmente independientes.

Ejemplo 17 *Resuelva el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} &\min x + y + z \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

2.5 Criterio de 2$^{\text{do}}$ orden para extremos restringidos.

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min(\max) f(x_1,...,x_n) \\ &g_i(x_1,...,x_n) = 0 \quad \forall i = 1,...,p \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde f, g_i, son funciones diferenciables.

Por el Teorema anterior sabemos que si $\{\nabla g_i(x_1,...,x_n)\}$ son l.i. entonces existe $\lambda \in \Re^p$ tal que:

$$\nabla f(x_1,...,x_n) = \lambda^{\mathrm{T}} \nabla g(x_1,...,x_n)$$

donde $g(x_1,...,x_n) = (g_1(x_1,...,x_n),...,g_p(x_1,...,x_n))^{\mathrm{T}}$, es decir

$$\nabla L(x_1,...,x_n,\lambda) = 0$$

donde L representa el Lagrangeano del problema (2.4).

De los puntos críticos para el Lagrangeano, más las restricciones, obtenemos posibles candidatos a mínimos o máaximos locales:

$$\begin{aligned} \nabla L(\vec{x}) &= 0 \\ g_i(\vec{x}) &= 0 \quad \forall i = 1,...,p \end{aligned}$$

En el caso sin restricciones, el criterio para determinar de que tipo eran los posibles extremos era analizando la matríz Hessiana de la función objetivo, en dependencia de si esta era definida negativa o positiva, entonces se tenía un máximo o un mínimo respectivamente.

Un criterio similar se tiene para el caso de un problema con restricciones, sin embargo no será necesario que el Hessiano, en este caso el del Lagrangeano, sea definido positivo o negativo para cada dirección h, en realidad bastará que lo sea en un cierto conjunto que denominaremos *conjunto de direcciones críticas* y lo definiremos como:

$$K(x) = \left\{ h \in \Re^n \mid \nabla g_i(x)^{\mathrm{T}} h = 0 \quad \forall i = 1,...,p \ , \nabla f(x)^{\mathrm{T}} h \leq 0 \right\}$$

cuando el problema es de minimización y

$$K(x) = \left\{ h \in \Re^n \mid \nabla g_i(x)^{\mathrm{T}} h = 0 \quad \forall i = 1,...,p \ , \nabla f(x)^{\mathrm{T}} h \geq 0 \right\}$$

cuando es de maximización.

Teorema 18 *Sea* $x_0 \in S = \{x \mid g_i(x) = 0 \quad \forall i \in I = \{1, ..., p\}\}$. *Supongamos que* $\{\nabla g_i(x_0)\}_{i\in I}$ *son linealmente independientes, entonces existe* $\lambda \in \Re^p$ *tal que*

$$\nabla L(x_0, \lambda) = 0$$

Si además se tiene que

$$h^{\mathrm{T}} H_x L(x_0, \lambda) h > 0 \quad \forall h \in K(x),\ h \neq 0$$

entonces x_0 *es un mínimo local de (2.4). (máximo local de (2.4) respectivamente).*

Observemos que en el Teorema el Hessiano del Lagrangeano es solo con respecto a x, es decir

$$\begin{aligned} H_x L(x_0, \lambda) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(x_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(x_0, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x_0, \lambda) \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, \lambda) \right)_{i,j=1}^{n} \end{aligned}$$

Ejemplo 19 *En el ejemplo (14), diga si el punto* $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *es un máximo o un mínimo.*

Para esto, construyamos primeramente el Lagrangeano del problema:

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + y^2 - \lambda(y - x - 1) \end{aligned}$$

Recordemos que el multiplicador de lagrange era $\lambda = 1$, *por tanto, el Hessiano del Lagrangeano queda:*

$$H_x L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

el cual es definido positivo para todo h, *en particular para las direcciones del conjunto de direcciones críticas y por tanto el punto* $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *es un mínimo.*

Ejemplo 20 *Optimice el valor de la función $f(x,y) = x$ sobre el conjunto de puntos (x,y) tales que $x^2 + 2y^2 = 3$*

El Lagrangeano para este problema queda de la siguiente forma:

$$L(x,y,\lambda) = x - \lambda(x^2 + 2y^2 - 3)$$

de donde es tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Longrightarrow 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Longrightarrow -4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 &= 3 \end{aligned}$$

y por tanto, los posibles candidatos a extremos (λ no puede ser cero) son:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, \lambda_1) &= \left(\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) &= \left(-\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

por otro lado se tiene que:

$$H_x L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -4\lambda \end{pmatrix}$$

es decir, para $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $H_x L(x_1, y_1, \lambda_1)$ es definida negativa y por tanto $(x_1, y_1) = (\sqrt{3}, 0)$ es un máximo local mientras que para $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $H_x L(x_2, y_2, \lambda_2)$ es definida positiva y por lo tanto $(x_2, y_2) = (-\sqrt{3}, 0)$ es un mínimo local.

Capítulo 3

Integración

3.1 Motivación

Nos interesa extender la noción de "área bajo una curva", formalizada por la integral de Riemann en una variable, a la de "área bajo una superficie" en $\mathbb{R}^N$. Luego estudiaremos las propiedades fundamentales de la integral de Riemann en varias variables. Finalmente veremos algunas aplicaciones a problemas físicos.

3.2 Integral de Riemann en $\mathbb{R}^2$

3.2.1 Definiciones

$R \subseteq \mathbb{R}^2$ es un rectángulo si y sólo si $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ con $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

El área de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es

$$V(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Para $m \in \mathbb{N}$, la m-equipartición del intervalo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es $\big\{[c_0, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_{m-1}, c_m]\big\}$ con $c_i = a + i\frac{b-a}{m}, i = 0, \ldots, m$.

Para $m \in \mathbb{N}$, la m-equipartición del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es $P = \{I_1 \times I_2 : I_i \in P_i, i = 1, 2\}$ con P_i m-equipartición del intervalo $[a_i, b_i], i = 1, 2$. La denotaremos $P_m(R)$.

Dado un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$ y $m \in \mathbb{N}$, decimos que $(c_P)_{P \in P_m(R)}$ es una selección (para $P_m(R)$) si $(\forall P \in P_m(R)) c_P \in P$.

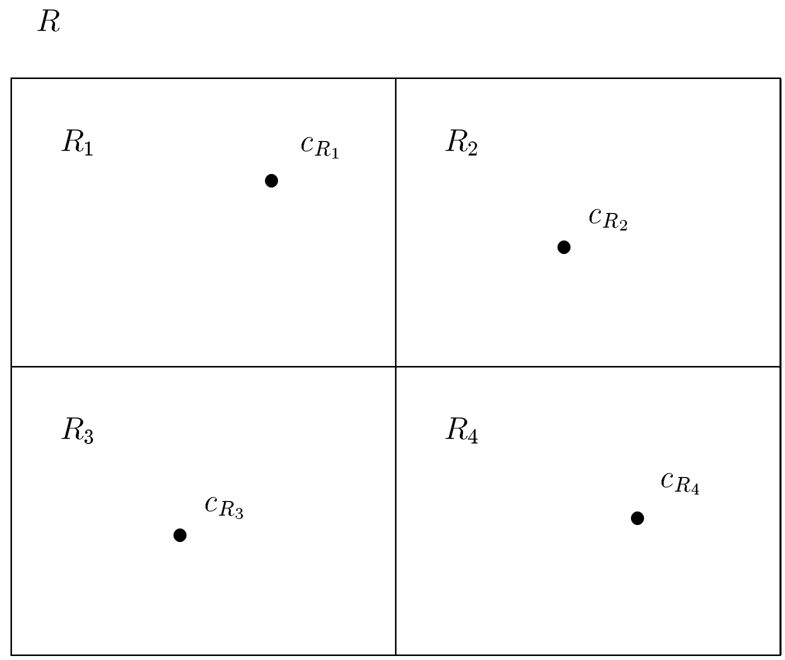

Figura 3.1: 2-equipartición y selección

Notar que cada elemento de una m-equipartición es un rectángulo y que una m-equipartición es finita, luego la siguiente definición tiene sentido:

Definición 3.1 *Sea $m \in \mathbb{N}$, $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$ y una selección $(c_P)_{P \in P_m(R)}$. Se define la suma de Riemann asociada a f y $(c_P)_{P \in P_m(R)}$ como:*

$$S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) = \sum_{P \in P_m(R)} f(c_P) V(P).$$

Definición 3.2 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Decimos que f es Riemann integrable en R si y sólo si $(\exists S \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)$*

$$\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| < \epsilon$$

para toda elección de los $(c_P)_{P \in P_m(R)}$.

S se llama integral (de Riemann) de f sobre R y se denota:

$$\int_R f.$$

La integral de f también se anota:

$$\int_R f(x)\,dx.$$

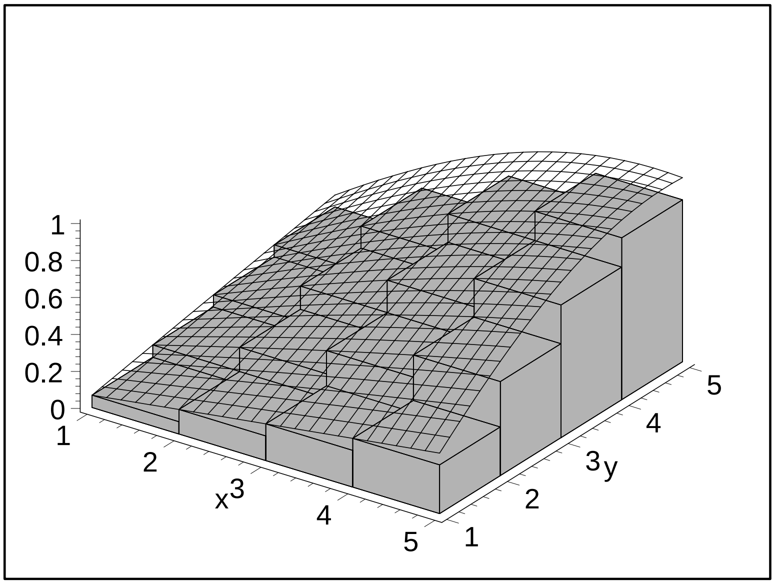

Figura 3.2: Suma de Riemann para la función $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{xy}{15}$ para $P_4([1,5]^2)$

Ejemplo 3.1 *Para $R = [0,1]^2$, no es integrable en R la función $f : R \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0 & (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3.2.2 Propiedades Básicas

Proposición 3.1 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Si f es integrable en R entonces f es acotada en R.*

Demostración. En efecto, sea $\epsilon = 1$, $m = m_0$ en la definición de integrabilidad. Luego

$$\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| < 1$$

$$\left| \sum_{P \in P_m(R)} f(c_P) V(P) - S \right| < 1$$

$$\left| \sum_{P \in P_m(R)} f(c_P) V(P) \right| < 1 + |S|$$

y para un cierto $P_0 \in P_m(R)$

$$\left| f(c_{P_0}) \right| V(P_0) < 1 + |S| + \left| \sum_{P \in P_m(R) \setminus \{P_0\}} f(c_P) V(P) \right|$$

$$\left| f(c_{P_0}) \right| < \frac{1}{V(P_0)} \left(1 + |S| + \left| \sum_{P \in P_m(R) \setminus \{P_0\}} f(c_P) V(P) \right| \right).$$

Fijando los c_P, para $P \in P_m(R) \setminus \{P_0\}$ y notando que c_{P_0} es arbitrario en P_0 se concluye que f es acotada en P_0. Como además P_0 es arbitrario en $P_m(R)$ se concluye que f es acotada en cada $P \in P_m(R)$, luego f es acotada en R. ∎

La siguiente propiedad es análoga a la condición de Cauchy para una sucesión, luego es útil por ejemplo para estudiar la integrabilidad de una función cuando no se conoce el valor de su integral.

Proposición 3.2 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

- $\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall k, m \geq m_0, \forall (c'_P)_{P \in P_k(R)}$ *selección,* $\forall (c_P)_{P \in P_m(R)}$ *selección*

$$\left| S(f, (c'_P)_{P \in P_k(R)}) - S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) \right| < \epsilon,$$

- f *es integrable en* R.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Fijemos ciertas selecciones $(c_P^m)_{P \in P_m(R)}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, por la hipótesis, la sucesión $\left(S(f, (c_P^m)_{P \in P_m(R)}) \right)_{m \in \mathbb{N}}$

resulta ser de Cauchy y converge a un cierto $S \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $m_1 \geq m_0$ tal que $(\forall m \geq m_0)$

$$\left| S(f, (c_P^m)_{P \in P_m(R)}) - S \right| < \epsilon.$$

Sea $m \geq m_0$ y una selección $(c_P)_{P \in P_m(R)}$ arbitraria. Así, nuevamente con la hipótesis, resulta que

$$\begin{aligned}\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| &\leq \left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S(f, (c_P^{m_1})_{P \in P_{m_1}}) \right| \\ &\quad + \left| S(f, (c_P^{m_1})_{P \in P_{m_1}}) - S \right| \\ &< 2\epsilon.\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Sea $\epsilon > 0$, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall m \geq m_0)$

$$\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| < \epsilon$$

para toda elección de los $(c_P)_{P \in P_m(R)}$. Sean $k, m \geq m_0$ arbitrarios, sean $(c_P)_{P \in P_m(R)}$, $(c'_P)_{P \in P_k(R)}$ selecciones arbitrarias. Luego:

$$\begin{aligned}\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S(f, (c'_P)_{P \in P_k(R)}) \right| &\leq \left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| \\ &\quad + \left| S - S(f, (c'_P)_{P \in P_k(R)}) \right| \\ &\leq 2\epsilon.\end{aligned}$$

■

El siguiente lema es una consecuencia de la proposición 3.2 y nos da una condición necesaria y suficiente de integrabilidad más fácil de verificar en varias de las propiedades que siguen. La principal diferencia con la proposición 3.2 es que en vez de comparar todos los pares de particiones, compara pares de particiones que son una un refinamiento de la otra.

Lema 3.1 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Son equivalentes*

- $(\forall \epsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)(\forall (c_P)_{P \in P_m(R)}, (c'_P)_{P \in P_{km}(R)}$ *selección*)

$$\sum_{P \in P_m(R)} \sum_{\substack{Q \in P_{km}(R) \\ Q \subseteq P}} \left| f(c'_Q) - f(c_P) \right| V(Q) < \epsilon,$$

- *f es integrable en R.*

Demostración. Usaremos la proposición 3.2 para sustituir la condición f integrable en R.

($\Rightarrow$) Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis $(\exists m_0 \in I\!N)(\forall k \in I\!N)(\forall m \geq m_0)(\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}$ selección$)(\forall (c'_P)_{P\in P_{km}(R)}$ selección$)$

$$\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c'_Q) - f(c_P)\right| V(Q) < \epsilon.$$

Sean $k, m \geq m_0$, sean $(c_P)_{P\in P_m(R)}$, $(c'_P)_{P\in P_k(R)}$ selecciones. Sea $(c''_P)_{P\in P_{km}(R)}$ selección. Luego:

$$\begin{aligned}
&\left|S(f,(c''_Q)_{Q\in P_{km}(R)}) - S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)})\right| \\
=&\left|\sum_{Q\in P_{km}(R)} f(c''_Q)V(Q) - \sum_{P\in P_m(R)} f(c_P)V(P)\right| \\
=&\left|\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} f(c''_Q)V(Q) - \sum_{P\in P_m(R)} f(c_P) \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} V(Q)\right| \\
\leq& \sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c''_Q) - f(c_P)\right| V(Q) \\
<& \ \epsilon.
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\left|S(f,(c''_Q)_{Q\in P_{km}(R)}) - S(f,(c'_P)_{P\in P_k(R)})\right| < \epsilon.$$

Así

$$\begin{aligned}
&\left|S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)}) - S(f,(c'_P)_{P\in P_k(R)})\right| \\
\leq& \left|S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)}) - S(f,(c''_Q)_{Q\in P_{km}(R)})\right| \\
&+ \left|S(f,(c''_Q)_{Q\in P_{km}(R)}) - S(f,(c'_P)_{P\in P_k(R)})\right| \\
<& \ 2\epsilon.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis, $(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall k, m \geq m_0)(\forall (c'_P)_{P \in P_k(R)}$ selección$)(\forall (c_P)_{P \in P_m(R)}$ selección$)$

$$\left| S(f, (c'_P)_{P \in P_k(R)}) - S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) \right| < \epsilon.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$, sean $(c_P)_{P \in P_m(R)}, (c'_P)_{P \in P_{km}(R)}$ selecciones. Para $P \in P_m(R)$ definamos $c_P^+ = \text{argmax}\{f(c'_Q) : Q \in P_{km}(R), Q \subseteq P\} \cup \{f(c_P)\}$, $c_P^- = \text{argmin}\{f(c'_Q) : Q \in P_{km}(R), Q \subseteq P\} \cup \{f(c_P)\}$. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{P \in P_m(R)} \sum_{\substack{Q \in P_{km}(R) \\ Q \subseteq P}} & \left| f(c'_Q) - f(c_P) \right| V(Q) \\
& \leq \sum_{P \in P_m(R)} \sum_{\substack{Q \in P_{km}(R) \\ Q \subseteq P}} \big(f(c_P^+) - f(c_P^-) \big) V(Q) \\
& = \sum_{P \in P_m(R)} \big(f(c_P^+) - f(c_P^-) \big) V(P) \\
& = S(f, (c_Q^+)_{Q \in P_m(R)}) - S(f, (c_P^-)_{P \in P_m(R)}) \\
& < \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Posteriormente (teorema 4.11) probaremos que toda función continua sobre un rectángulo es uniformemente continua en él. En realidad lo probaremos para conjuntos mucho más generales que rectángulos, llamados compactos. Esta propiedad se utiliza en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.3 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Si f es continua en R entonces f es integrable en R.*

Demostración. Como R es compacto y f es continua en R se tiene que f es uniformemente continua en R. Luego, para $\epsilon > 0$ arbitrario, $(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in R)$

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \epsilon.$$

Recurriremos al lema 3.1. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall P \in P_{m_0})(\forall x, y \in P) \|x - y\| < \delta$. Sea $m \geq m_0$, $k \in \mathbb{N}$. Sean $(c_P)_{P \in P_m(R)}$, $(c'_P)_{P \in P_{km}(R)}$ selecciones.

Por la uniforme continuidad se tiene que

$$\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c'_Q)-f(c_P)\right|V(Q) \leq \epsilon V(R)$$

■

Proposición 3.4 *Sea $R\subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f,g:R\to\mathbb{R}$ funciones integrables, $c\in\mathbb{R}$. Entonces*

1. *(linealidad) $f+cg$ es integrable en R y*

$$\int_R f+cg = \int_R f + c\int_R g,$$

2. *(monotonía) si $(\forall x\in R)f(x)\leq g(x)$, entonces*

$$\int_R f \leq \int_R g,$$

3. *$|f|$ es integrable en R y*

$$\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|,$$

Demostración.

1. Sea $\epsilon>0$ arbitrario. Sea $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $(\forall m\geq m_0)(\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}$ selección)

$$\left|S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)}) - \int_R f\right| < \epsilon$$

y

$$\left|S(g,(c_P)_{P\in P_m(R)}) - \int_R f\right| < \epsilon.$$

Por otra parte, se tiene:

$$S(f+cg,(c_P)_{P\in P_m(R)}) = S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)}) + cS(g,(c_P)_{P\in P_m(R)}).$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\left|S(f+cg,(c_P)_{P\in P_m(R)})-(\int_R f+c\int_R g)\right|\\
&\leq \left|S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)})-\int_R f\right|+|c|\left|S(g,(c_P)_{P\in P_m(R)})-\int_R g\right|\\
&\leq \big(1+|c|\big)\epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, por definición de integral de Riemann, se concluye.

2. Es directo de considerar que en este caso se cumple que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}$ selección

$$S(f,(c_P)_{P\in P_m(R)}) \leq S(g,(c_P)_{P\in P_m(R)})$$

y aplicar la definición de integral de Riemann.

3. Veamos que $|f|$ es integrable en R por medio del lema 3.1.

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como f es integrable, por el mismo lema $(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)(\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}, (c'_P)_{P\in P_{km}(R)}$ selección)

$$\sum_{P\in P_m(R)}\sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}}\big|f(c'_Q)-f(c_P)\big|V(Q)<\epsilon,$$

Luego, sean $k\in\mathbb{N}$, $m \geq m_0$. Se sabe que $(\forall x,y \in \mathbb{R})$

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|\,.$$

Así

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in P_m(R)}\sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}}&\big|\,|f|\,(c'_Q)-|f|\,(c_P)\big|V(Q)\\
&\leq \sum_{P\in P_m(R)}\sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}}\big|f(c'_Q)-f(c_P)\big|V(Q)\\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

En conclusión, $|f|$ es integrable en R. Finalmente, se tiene

$$-\,|f| \leq f \leq |f|$$

que, con la parte anterior, implica que

$$-\int_R |f| \leq \int_R f \leq \int_R |f| ,$$

es decir

$$\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f| .$$

■

Proposición 3.5 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$. Si f es integrable en R entonces*

$$V(R) \inf_{x\in R} f(x) \leq \int_R f \leq V(R) \sup_{x\in R} f(x).$$

Demostración. Basta notar que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}$ selección

$$V(R) \inf_{x\in R} f(x) \leq S(f, (c_P)_{P\in P_m(R)}) \leq V(R) \sup_{x\in R} f(x).$$

■

3.2.3 Integración de sucesiones de funciones

Proposición 3.6 *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones, $f_k : R \to \mathbb{R}$, que convergen uniformemente en R a $f : R \to \mathbb{R}$. Entonces f es integrable en R y*

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} \int_R f_k.$$

Demostración. Veamos que f es integrable en R por medio del lema 3.1. Sea $\epsilon > 0$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in R}\left|f(x) - f_{k_0}(x)\right| < \epsilon. \tag{3.1}$$

De acuerdo al lema 3.1, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)(\forall (c_P)_{P\in P_m(R)}$, $(c'_P)_{P\in P_{km}(R)}$ selección)

$$\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f_{k_0}(c'_Q) - f_{k_0}(c_P)\right| V(Q) < \epsilon. \tag{3.2}$$

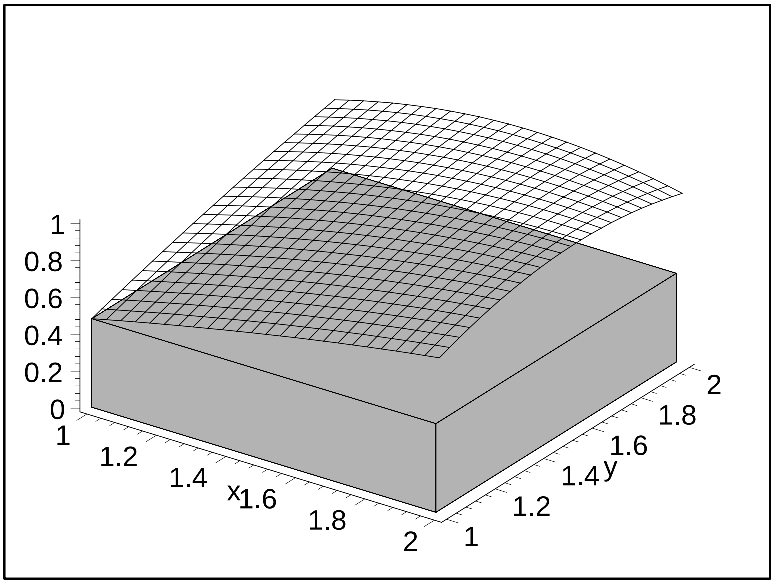

Figura 3.3: Ejemplo de que $V(R)\inf_{x\in R} f(x) \leq \int_R f$

Luego, sean $k \in I\!N$, $m \geq m_0$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \big|f(c'_Q) - f(c_P)\big| V(Q) \\
&\qquad \leq \sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \big|f(c'_Q) - f_{k_0}(c'_Q)\big| V(Q) \\
&\qquad\quad + \sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \big|f_{k_0}(c'_Q) - f_{k_0}(c_P)\big| V(Q) \\
&\qquad\quad + \sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \big|f_{k_0}(c_P) - f(c_P)\big| V(Q)
\end{aligned}$$

y aplicando 3.1 y 3.2 se obtiene

$$\leq \epsilon\big(2V(R)+1\big).$$

En conclusión, f es integrable en R. Por otra parte, por la proposición 3.5

$$\begin{aligned}\left|\int_R f_k - \int_R f\right| &= \left|\int_R (f_k - f)\right| \\ &\leq \int_R |f_k - f| \\ &\leq V(R) \sup_{x\in R} |f_k(x) - f(x)|\,,\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} \int_R f_k.$$

■

Ejemplo 3.2 *Una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a un límite que no lo es. Sea la numeración* $\{q_0, q_1, \dots\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, *sea* $I = [0,1]$ *y las funciones* $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 0 & (x,y) \notin \{q_1, \dots, q_n\}, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & (x,y) \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En I, *se tiene que* f_n *converge a* f *puntualmente (pero no uniformemente) y cada* f_n *es integrable, pero* f *no es integrable.*

3.2.4 Extensión de la clase de funciones integrables

Aún cuando la clase de funciones continuas es muy amplia, todavía no es suficiente para muchas aplicaciones. Así, a continuación veremos una condición suficiente de integrabilidad un poco más débil que la continuidad, esto es, que una función sea continua salvo sobre la unión de grafos de funciones continuas.

Recordar que el grafo de una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es

$$\text{grafo}(g) = \big\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\big\}.$$

Intuitivamente, el lema siguiente nos dice que el grafo de una función continua tiene “volumen cero”.

Lema 3.2 *Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ continua. Denotemos $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\cap \text{grafo}(g)\neq\emptyset}} V(P) = 0$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f continua en $[a,b]$ compacto, se tiene que f es uniformemente continua en $[a,b]$ (teorema 4.11). Luego $(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in [a,b])$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \epsilon.$$

Así, escojamos $m_0 \in I\!N$ tal que $(b-a)(d-c)/m_0 \leq \epsilon$ y

$$(b-a)/m_0 < \delta. \tag{3.3}$$

Entonces, se cumple que $(\forall m \geq m_0)$

$$\sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\cap \text{grafo}(g)\neq\emptyset}} V(P) = \frac{(b-a)(d-c)}{m^2}\big|\{P \in P_m(R) : P \cap \text{grafo}(g) \neq \emptyset\}\big|.$$

Gracias a la uniforme continuidad y 3.3

$$\big|\{P \in P_m(R) : P \cap \text{grafo}(g) \neq \emptyset\}\big| \leq m(\frac{\epsilon}{(d-c)/m} + 1).$$

Así, $\forall m \geq m_0$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\cap \text{grafo}(g)\neq\emptyset}} V(P) &\leq \frac{(b-a)(d-c)}{m^2} m(\frac{\epsilon}{(d-c)/m} + 1)\\ &= \epsilon(b-a) + \frac{(b-a)(d-c)}{m}\\ &\leq \epsilon(b-a+1).\end{aligned}$$

■

Para $A \subseteq I\!R^N$ acotado, se define el diámetro de A como

$$\text{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|.$$

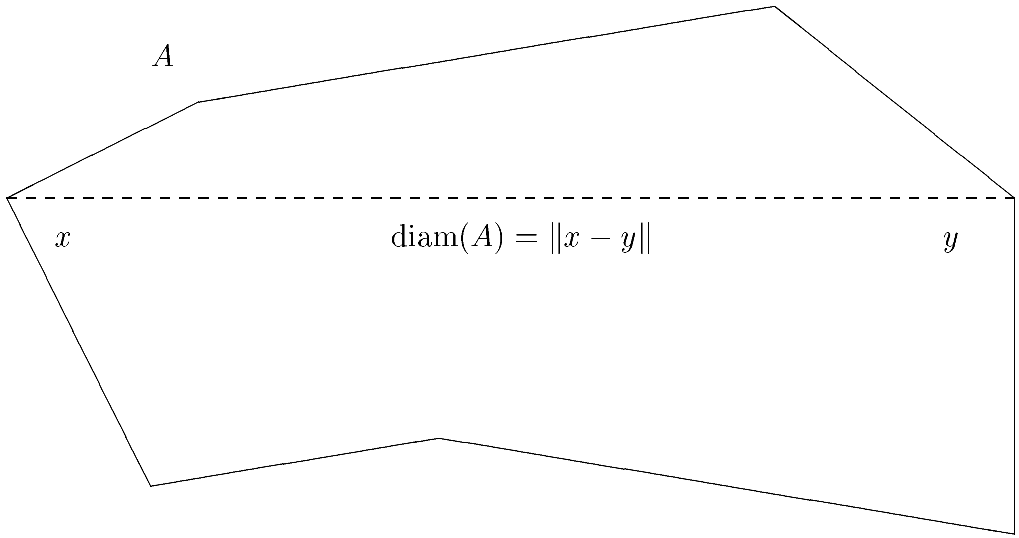

Figura 3.4: Diámetro de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$

Proposición 3.7 *Sea $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$ acotada en R y continua en $R \setminus \mathrm{grafo}(g)$, donde $g : [a,b] \to [c,d]$ es una función continua. Entonces f es integrable en R.*

Demostración. Sea $K \in \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in R)$

$$\left| f(x) \right| \leq K. \tag{3.4}$$

Recurriremos al lema 3.1. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. De acuerdo al lema 3.2, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall m \geq m_0)$

$$\sum_{\substack{P \in P_m(R) \\ P \cap \mathrm{grafo}(g) \neq \emptyset}} V(P) \leq \epsilon. \tag{3.5}$$

Denotemos $P_m^* = \{P \in P_m(R) : P \cap \mathrm{grafo}(g) = \emptyset\}$, $R_m^* = \bigcup_{P \in P_m^*} P$. Como $R_{m_0}^*$ es compacto y f es continua en $R_{m_0}^*$ se tiene que f es uniformemente continua en $R_{m_0}^*$. Luego $(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in R_{m_0}^*)$

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{3.6}$$

Sea $m_1 \geq m_0$ tal que $(\forall P \in P_{m_1}(R))\, \mathrm{diam}(P) < \delta$. Sea $m \geq m_1$, $k \in I\!N$. Sean $(c_P)_{P\in P_m(R)}$, $(c'_P)_{P\in P_{km}(R)}$ selecciones. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in P_m(R)} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c'_Q) - f(c_P)\right| V(Q) \\
&= \sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\subseteq R^*_{m_0}}} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c'_Q) - f(c_P)\right| V(Q) \\
&\quad + \sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\not\subseteq R^*_{m_0}}} \sum_{\substack{Q\in P_{km}(R)\\ Q\subseteq P}} \left|f(c'_Q) - f(c_P)\right| V(Q)
\end{aligned}$$

que, con 3.4 y 3.6, implica que

$$\leq \epsilon V(R) + 2K \sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\not\subseteq R^*_{m_0}}} V(P)$$

y con 3.5 resulta

$$\leq \epsilon V(R) + \epsilon 18K.$$

$\blacksquare$

Corolario 3.1 *Sea $R = [a,b]\times[c,d] \subseteq I\!R^2$ rectángulo, $f : R \to I\!R$ acotada en R y continua en $R \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathrm{grafo}(g_i)$, donde $g_i : [a,b] \to [c,d]$ es continua. Entonces f es integrable en R.*

3.2.5 Teorema de Fubini

El siguiente teorema expresa la integral de una función en 2 variables como la aplicación iterada de 2 integrales en una variable bajo hipótesis mínimas y permite escoger arbitrariamente el orden de estas integrales en una variable cuando la función a integrar es continua.

La demostración la haremos en la sección 3.3 en $I\!R^N$.

Teorema 3.1 *Sea $R = [a,b]\times[c,d] \subseteq I\!R^2$ rectángulo, $f : R \to I\!R$.*

1. *Si f integrable en R y $(\forall x \in [a,b]) f(x,\cdot)$ integrable en $[c,d]$, entonces*

$$\int_R f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

2. *Si f continua en R, entonces*

$$\int_R f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Ejemplo 3.3 *Para $R = [0,1] \times [0,1]$, calcular*

$$\int_R x^2 + y$$

Solución. Por el teorema de Fubini, caso continuo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_R x^2 + y &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 x^2 + y\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(x^2 y + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^1 \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4 *Veamos un caso en el que las integrales iteradas existen y son iguales, pero la función no es integrable.*

Consideremos el cuadrado unitario $R = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ y la sucesión de cuadrados $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en él dada por la figura 3.2.5. Dividamos cada R_k en 4 cuadrados iguales $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, R_k^{(3)}, R_k^{(4)}$. Definamos la función $f : R \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{V(R_k)} & \text{si } (x,y) \in \operatorname{int} R_k^{(1)} \cup \operatorname{int} R_k^{(3)} \\ -\frac{1}{V(R_k)} & \text{si } (x,y) \in \operatorname{int} R_k^{(2)} \cup \operatorname{int} R_k^{(4)} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

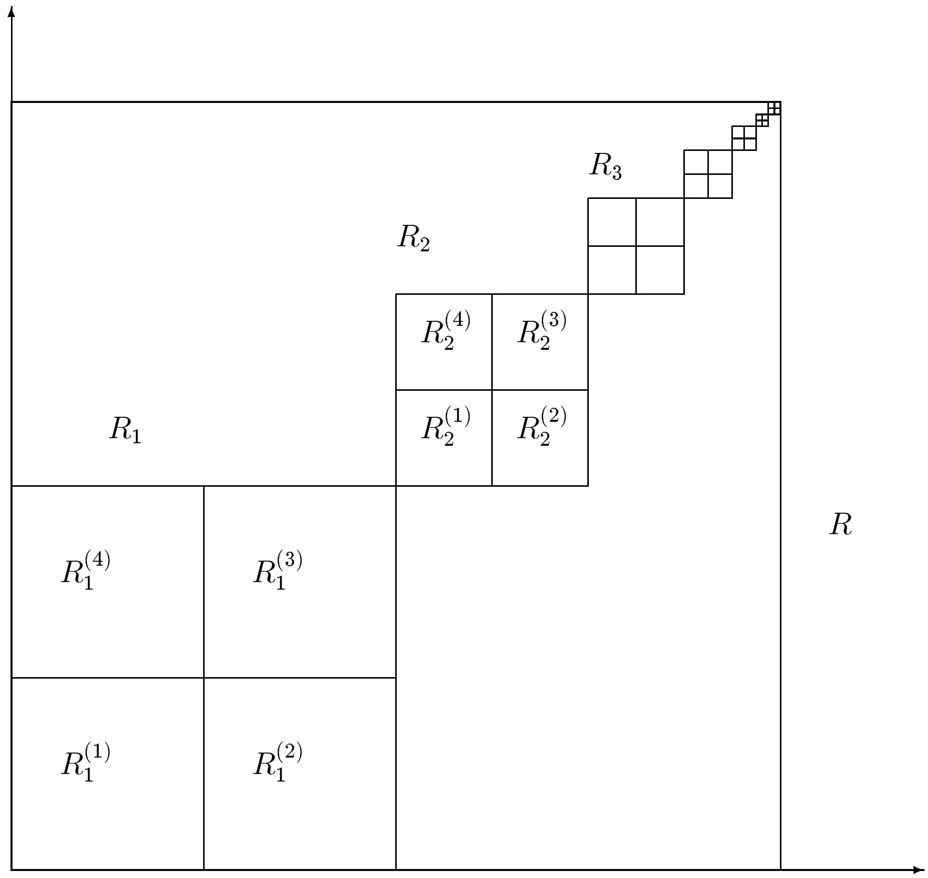

Figura 3.5: El dominio del ejemplo 3.4

Para cada $y \in [0,1]$ es claro que

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0$$

y análogamente para cada $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0$$

Luego, las integrales iteradas son ambas nulas, esto es:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

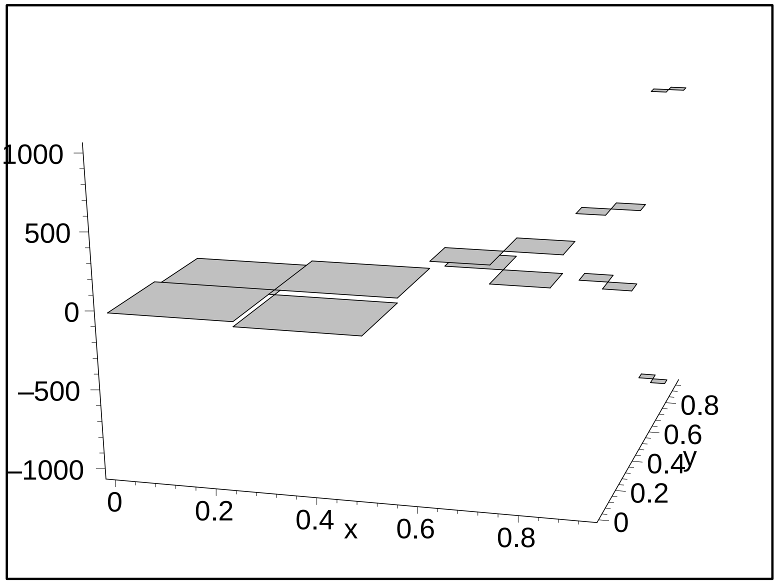

Figura 3.6: La función del ejemplo 3.4

Para convencernos de que f no es integrable, es suficiente ver que $|f|$ no es integrable. En efecto, $|f|$ está dada por

$$|f|(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{V(R_k)} & \text{si } (x,y) \in R_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $|f|$ fuera integrable, como los R_k son disjuntos, se tendría que

$$\int_R |f| = \sum_{k \in I\!N} \int_{R_k} |f|,$$

pero

$$\int_{R_k} |f| = 1$$

con lo que $|f|$ no puede ser integrable en R.

3.2.6 Integral en $I\!R^2$ sobre dominios generales

A continuación extenderemos la definición de integral para considerar la integración de funciones sobre algunos dominios un tanto más generales que los rectángulos.

Definición 3.3 *Sea $R \subseteq I\!R^2$ rectángulo, $A \subseteq R$, $f : A \to I\!R$. Denotemos $f_0 : R \to I\!R$ a la función dada por, para $x \in R$:*

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Si f_0 es integrable sobre R entonces se dice que f es integrable sobre A y:

$$\int_A f = \int_R f_0.$$

Definición 3.4 *Decimos que $D \subseteq I\!R^2$ es*

- *de tipo 1 si y sólo si $\exists a, b \in I\!R$, $\exists \phi_1, \phi_2 : [a,b] \to I\!R$ funciones continuas tales que $(\forall x \in [a,b])\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ y*

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

- *de tipo 2 si y sólo si $\exists c, d \in I\!R$, $\exists \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to I\!R$ funciones continuas tales que $(\forall x \in [c,d])\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$ y*

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

- *de tipo 3 si y sólo si D es de tipo 1 y 2,*

- *elemental si y sólo si D es de tipo 1 ó 2.*

Si $R \subseteq I\!R^2$ es un rectángulo y $D \subseteq R$ es una región elemental entonces f_0 (dada por la definición 3.3) es continua en R salvo sobre la unión finita de grafos de funciones. Luego $\int_D f$ existe.

En general, supongamos que tenemos una función $f : A \subseteq R \to I\!R$ con R rectángulo y A dominio del tipo 1, digamos:

$$A = \{(x,y) \in I\!R^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

con $a, b \in I\!R$, $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to I\!R$ funciones continuas. Entonces, gracias al teorema de Fubini (teorema 3.1), se tiene que:

$$\int_A f = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

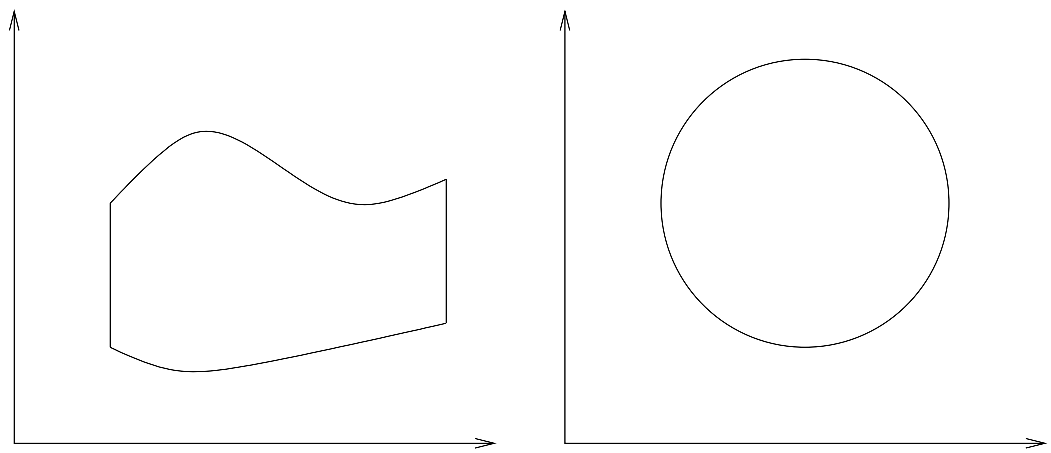

Figura 3.7: Dominio del tipo 1 que no es del tipo 2 y dominio del tipo 3

Ejemplo 3.5 *Calcular*

$$\int_T (x^3 y + \cos x)\, dy\, dx$$

donde

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x\}.$$

SOLUCIÓN. Notar que T es una región del tipo 1. Por definición se tiene que

$$\int_T (x^3 y + \cos x)\, dy\, dx = \int_{[0,\pi/2]^2} \mathbf{1}_T (x^3 y + \cos x)\, dy\, dx$$

y, en virtud del teorema de Fubini:

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \mathbf{1}_T (x^3 y + \cos x)\, dy\, dx.$$

Más aún, con la definición de T:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^x (x^3y+\cos x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (\frac{x^3y^2}{2}+y\cos x)\Big|_{y=0}^{x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{x^5}{2}+x\cos x\,dx \\
&= (\frac{x^6}{12}+\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^6}{768}+\frac{\pi}{2}-1.
\end{aligned}
$$

$\square$

3.3 Integral de Riemann en $I\!R^N$

Las demostraciones que no se incluyen en esta sección son idénticas a las hechas en la sección 3.2, acerca de la integral de Riemann en $I\!R^2$.

3.3.1 Definiciones

$R \subseteq I\!R^N$ es un rectángulo si y sólo si $R = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ con $a_i, b_i \in I\!R$.

Para un rectángulo $R = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ se define su volumen como

$$V(R) = \prod_{i=1}^{n} b_i - a_i.$$

Para $m \in I\!N$, la m-equipartición del rectángulo $R = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ es $\{I_1\times\cdots\times I_n : I_i \in P_i, i = 1,\ldots,n\}$ con P_i m-equipartición del intervalo $[a_i,b_i], i = 1,\ldots,n$. La denotaremos $P_m(R)$.

Dado un rectángulo $R \subseteq I\!R^N$ y $m \in I\!N$, decimos que $(c_P)_{P\in P_m(R)}$ es una selección (para $P_m(R)$) si $(\forall P \in P_m(R))c_P \in P$.

Notar que cada elemento de una m-equipartición es un rectángulo y que una m-equipartición es finita, luego la siguiente definición tiene sentido:

Definición 3.5 *Sea $m \in I\!N$, $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$ y una selección $(c_P)_{P \in P_m(R)}$. Se define la suma de Riemann asociada a f y $(c_P)_{P \in P_m(R)}$ como:*

$$S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) = \sum_{P \in P_m(R)} f(c_P) V(P).$$

Definición 3.6 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$. Decimos que f es Riemann integrable en R si y sólo si $(\exists S \in I\!R)$ $\forall \varepsilon$ $\exists m_0$, $m \geq m_0$ implica*

$$\left| S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) - S \right| < \epsilon$$

para toda elección de los $(c_P)_{P \in P_m(R)}$.

S se llama integral (de Riemann) de f sobre R y se denota:

$$\int_R f.$$

La integral de f también se anota:

$$\int_R f(x)\, dx.$$

3.3.2 Propiedades Básicas

Proposición 3.8 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$. Si f es integrable en R entonces f es acotada en R.*

Proposición 3.9 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$. Son equivalentes:*

- $\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in I\!N, \forall k, m \geq m_0, \forall (c'_P)_{P \in P_k(R)}$ *selección*, $\forall (c_P)_{P \in P_m(R)}$ *selección*

$$\left| S(f, (c'_P)_{P \in P_k(R)}) - S(f, (c_P)_{P \in P_m(R)}) \right| < \epsilon,$$

- *f es integrable en R.*

Proposición 3.10 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$. Si f es continua en R entonces f es integrable en R*

Proposición 3.11 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f, g : R \to I\!R$ funciones integrables, $c \in I\!R$. Entonces*

1. *(linealidad) $f + cg$ es integrable y*

$$\int_R f + cg = \int_R f + c\int g,$$

2. *(monotonía) si $(\forall x \in R) f(x) \leq g(x)$ entonces*

$$\int_R f \leq \int_R g,$$

3. *$|f|$ es integrable en R y*

$$\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|,$$

Proposición 3.12 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$. Si f es integrable en R entonces*

$$V(R)\inf_{x\in R} f(x) \leq \int_R f \leq V(R)\sup_{x\in R} f(x).$$

3.3.3 Integración de sucesiones de funciones

Proposición 3.13 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $(f_k)_{k\in I\!N}$ sucesión de funciones integrables, $f_k : R \to I\!R$, que convergen uniformemente en R a $f : R \to I\!R$. Entonces f es integrable en R y*

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty}\int_R f_k.$$

3.3.4 Extensión de la clase de funciones integrables

Recordar que el grafo de una función $g : A \subseteq I\!R^N \to I\!R^M$ es

$$\text{grafo}(g) = \{(x, g(x)) \in I\!R^{N+M} : x \in A\}.$$

La demostración del siguiente lema es análoga a la del lema 3.2.

Lema 3.3 *Sea $R' \subseteq I\!R^{N-1}$ rectángulo, $f : R' \to [a,b]$ continua. Denotemos $R = R' \times [a,b]$. Entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\cap \mathrm{grafo}(g)\neq\emptyset}} V(P) = 0$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f continua en R' compacto, se tiene que f es uniformemente continua en R'. Luego $(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in R')$

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \big| f(x) - f(y) \big| < \epsilon.$$

Así, escojamos $m_0 \in I\!N$ tal que $V(R)/m_0 \leq \epsilon$ y $\mathrm{diam}(P) < \delta$, para cualquier $P \in P_m(R')$. Entonces, se cumple que $(\forall m \geq m_0)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P\in P_m(R)\\ P\cap \mathrm{grafo}(g)\neq\emptyset}} V(P) &= \frac{V(R)}{m^N}\big|\{P \in P_m(R) : P \cap \mathrm{grafo}(g) \neq \emptyset\}\big| \\
&\leq \frac{V(R)}{m^N} m^{N-1} \left(\frac{\epsilon}{(b-a)/m} + 1\right) \\
&= \epsilon V(R') + \frac{V(R)}{m} \\
&\leq \epsilon (V(R') + 1).
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.14 *Sea $R' \subseteq I\!R^{N-1}$ rectángulo, $R = R' \times [a,b] \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$ acotada en R y continua en $R \setminus \mathrm{grafo}(g)$, donde $g : R' \to [a,b]$ es una función continua. Entonces f es integrable en R.*

Corolario 3.2 *Sea $R' \subseteq I\!R^{N-1}$ rectángulo, $R = R' \times [a,b] \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$ acotada en R y continua en $R \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathrm{grafo}(g_i)$, donde $g_i : R' \to [a,b]$ es continua. Entonces f es integrable en R.*

3.3.5 Teorema de Fubini

Lema 3.4 *Sea $R \subseteq I\!R^N$ rectángulo, $f : R \to I\!R$, $m^* \in I\!N$. Si f es integrable en R entonces*

$$\sum_{S\in P_{m^*}(R)} V(S) \inf_{x\in S} f(x) \leq \int_R f \leq \sum_{S\in P_{m^*}(R)} V(S) \sup_{x\in S} f(x).$$

Demostración. En efecto, es claro que $\forall x \in R$

$$\sum_{S \in P_{m^*}(R)} \mathbf{1}_S(x) \inf_{x \in S} f(x) \leq f(x) \leq \sum_{S \in P_{m^*}(R)} \mathbf{1}_S(x) \sup_{x \in S} f(x).$$

Integrando se concluye la desigualdad buscada, notando que para $S \in P_{m^*}(R)$ se tiene

$$\int_R \mathbf{1}_S = \int_S 1 = V(S).$$

■

Teorema 3.2 *Sean $N, M \in I\!N$, $A \subseteq I\!R^N$, $B \subseteq I\!R^M$ rectángulos, notemos $R = A \times B \subseteq I\!R^{N+M}$ rectángulo. Sea $f : R \to I\!R$.*

1. *Si f integrable en R y $(\forall x \in A) f(x, \cdot)$ integrable en B, entonces*

$$\int_R f = \int_A (\int_B f(x, y)\, dy)\, dx.$$

2. *Si f continua en R, entonces*

$$\int_R f = \int_A (\int_B f(x, y)\, dy)\, dx = \int_B (\int_A f(x, y)\, dx)\, dy.$$

Demostración. La segunda parte es consecuencia directa de la primera, en virtud de la proposición 3.3. Probemos la primera parte.

Definamos la función $I : A \to I\!R$ dada por $I(x) = \int_B f(x, y) dy$. Luego basta probar que I es integrable en A y

$$\int_A I = \int_R f.$$

En efecto, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por una parte, por definición de integrabilidad, $(\exists m_0 \in I\!N)(\forall m \geq m_0)$

$$\left| \int_R f - \sum_{Q \in P_m(R)} f(c_Q) V(Q) \right| < \epsilon \tag{3.7}$$

para toda elección de los $(c_Q)_{Q \in P_m(R)}$.

Por otra parte, sea $m \geq m_0$, $(c_{Q_A})_{Q_A \in P_m(A)}$ selección arbitraria. Notar que

$$P_m(R) = \big\{ Q_A \times Q_B : Q_A \in P_m(A), Q_B \in P_m(B) \big\}$$

Consideremos la selección $(c_Q^*)_{Q \in P_m(R)}$ dada por (para $Q_A \in P_m(A), Q_B \in P_m(B)$) $c^*_{Q_A \times Q_B} = (c_{Q_A}, y^*)$, con y^* tal que $f(c^*_{Q_A \times Q_B}) \geq \sup_{y \in Q_B} f(c_{Q_A}, y) - \epsilon$. Así, en virtud del lema 3.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{Q_A \in P_m(A)} I(c_{Q_A}) V(Q_A) - \sum_{Q \in P_m(R)} f(c_Q^*) V(Q) \\
&\leq \sum_{\substack{Q_A \in P_m(A) \\ Q_B \in P_m(B)}} \sup_{y \in Q_B} f(c_{Q_A}, y) V(Q_A) V(Q_B) \\
&\quad - \sum_{\substack{Q_A \in P_m(A) \\ Q_B \in P_m(B)}} f(c^*_{Q_A \times Q_B}) V(Q_A) V(Q_B) \\
&= \sum_{\substack{Q_A \in P_m(A) \\ Q_B \in P_m(B)}} \big(\sup_{y \in Q_B} f(c_{Q_A}, y) - f(c^*_{Q_A \times Q_B}) \big) V(Q_A) V(Q_B) \\
&\leq \epsilon V(R).
\end{aligned}$$

Combinando con 3.7 se obtiene:

$$\sum_{Q_A \in P_m(A)} I(c_{Q_A}) V(Q_A) - \int_R f \leq \epsilon \big(V(R) + 1 \big).$$

Escogiendo $(c_Q^*)_{Q \in P_m(R)}$ tal que $f(c^*_{Q_A \times Q_B}) \leq \inf_{y \in Q_B} f(c_{Q_A}, y) + \epsilon$, un cálculo análogo permite obtener:

$$-\epsilon \big(V(R) + 1 \big) \leq \sum_{Q_A \in P_m(A)} I(c_{Q_A}) V(Q_A) - \int_R f.$$

En conclusión,

$$\Big| \sum_{Q_A \in P_m(A)} I(c_{Q_A}) V(Q_A) - \int_R f \Big| \leq \epsilon \big(V(R) + 1 \big).$$

■

Ejemplo 3.6 *Calcular* $\int_B f$ *con* $B = [0,1]^3 \times [0,10]$ *y* $f(x,y,z,t) = t(x^2 + y^2 + z^2)$.

Solución. En virtud del teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_B f &= \int_0^{10}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 t(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\,dt \\
&= \int_0^{10}\int_0^1\int_0^1 \left(t\frac{x^3}{3} + ty^2x + tz^2x\right)\Big|_{x=0}^{1}\,dy\,dz\,dt \\
&= \int_0^{10}\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{t}{3} + ty^2 + tz^2\right)dy\,dz\,dt \\
&= \int_0^{10}\int_0^1 \left(\frac{t}{3}y + t\frac{y^3}{3} + tz^2y\right)\Big|_{y=0}^{1}\,dz\,dt \\
&= \int_0^{10}\int_0^1 \left(\frac{t}{3} + \frac{t}{3} + tz^2\right)dz\,dt \\
&= \int_0^{10} t\,dt \\
&= 50.
\end{aligned}$$

□

3.3.6 Integral en $\mathbb{R}^N$ sobre dominios generales

Definición 3.7 *Sea* $R \subseteq \mathbb{R}^N$ *rectángulo,* $A \subseteq R$, $f : A \to \mathbb{R}$. *Denotemos* $f_0 : R \to \mathbb{R}$ *a la función dada por, para* $x \in R$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Si f_0 *es integrable sobre* R *entonces se dice que* f *es integrable sobre* A *y:*

$$\int_A f = \int_R f_0.$$

Definición 3.8 *Decimos que* $D \subseteq \mathbb{R}^3$ *es*

- *de tipo 1 si y sólo si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:*

– $\exists a, b \in I\!R$, $\exists \phi_1, \phi_2 : [a,b] \to I\!R$ *funciones continuas,* $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ *funciones continuas tales que*

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : a \le x \le b, \\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \\ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\},$$

donde $D' = \{(x,y) \in I\!R^2 : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$,

– $\exists c, d \in I\!R$, $\exists \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to I\!R$ *funciones continuas,* $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ *funciones continuas tales que*

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \\ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\},$$

donde $D' = \{(x,y) \in I\!R^2 : c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$,

- *de tipo 2 si y sólo si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:*

– $\exists a, b \in I\!R$, $\exists \phi_1, \phi_2 : [a,b] \to I\!R$ *funciones continuas,* $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ *funciones continuas tales que*

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : a \le x \le b, \\ \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x), \\ \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z)\},$$

donde $D' = \{(x,z) \in I\!R^2 : a \le x \le b, \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x)\}$,

– $\exists c, d \in I\!R$, $\exists \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to I\!R$ *funciones continuas,* $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ *funciones continuas tales que*

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : c \le y \le d, \\ \psi_1(z) \le x \le \psi_2(z), \\ \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z)\},$$

donde $D' = \{(x,z) \in I\!R^2 : c \le z \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(z)\}$,

- *de tipo 3 si y sólo si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:*

– *$\exists a, b \in I\!R$, $\exists \phi_1, \phi_2 : [a,b] \to I\!R$ funciones continuas, $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ funciones continuas tales que*

$$\begin{aligned} D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : a \le y \le b,& \\ \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y),& \\ \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\},& \end{aligned}$$

donde $D' = \{(y,z) \in I\!R^2 : a \le y \le b, \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y)\}$,

– *$\exists c, d \in I\!R$, $\exists \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to I\!R$ funciones continuas, $\exists \gamma_1, \gamma_2 : D' \to I\!R$ funciones continuas tales que*

$$\begin{aligned} D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : c \le z \le d,& \\ \psi_1(z) \le y \le \psi_2(z),& \\ \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\},& \end{aligned}$$

donde $D' = \{(y,z) \in I\!R^2 : c \le z \le d, \psi_1(z) \le y \le \psi_2(z)\}$,

- *de tipo 4 si y sólo si D es de tipo 1, 2 y 3,*
- *elemental si y sólo si D es de tipo 1, 2 ó 3.*

Si $R \subseteq I\!R^N$ es un rectángulo y $D \subseteq R$ es una región elemental entonces f_0 (dada por la definición 3.7) es continua en R salvo sobre la unión finita de grafos de funciones. Luego $\int_D f$ existe.

Ejemplo 3.7 *Sea $W \subseteq I\!R^3$ la región comprendida entre los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$. Calcular $\int_W x$.*

SOLUCIÓN. ¿Cómo describir el conjunto W? Podemos describirlo como un dominio de tipo 1, es decir:

$$W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : 0 \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2}, x^2 + y^2 \le z \le 2\}.$$

Luego, gracias al teorema de Fubini (teorema 3.2) se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_W x &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} 2x - x(x^2+y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} (2xy - x^3y - x\frac{y^3}{3})\Big|_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x(2\sqrt{2-x^2} - x^2\sqrt{2-x^2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2})\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x(\frac{2}{3}(2-x^2)^{3/2})\,dx
\end{aligned}$$

y, haciendo el cambio de variable $u = 2 - x^2$:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \frac{2}{3}\frac{1}{2}u^{3/2}du \\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_0^2 \\
&= \frac{2}{15}2^{5/2} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1 *Hallar el volumen de la región acotada por los paraboloides* $z = x^2 + y^2$ *y* $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

3.4 Teorema del cambio de variable

Recordemos que en el caso de una variable se tiene que si $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ es biyectiva (más algunas hipótesis adicionales) entonces

$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_{\sigma^{-1}(c)}^{\sigma^{-1}(d)} f(\sigma(s))\sigma'(s)\,ds.$$

Equivalentemente podemos escribir:

$$\int_{\sigma([a,b])} f(t)\, dt = \int_{[a,b]} f(\sigma(s))\, |\sigma'(s)|\ ds.$$

Nuestro propósito es extender esta fórmula a varias variables. Vamos a comenzar con la transformación más simple, la lineal. Sea $T : D = [0,1]^2 \to D^* = T(D)$, $T(x,y) = A\binom{x}{y}$ con $A \in M_{2,2}(I\!R)$

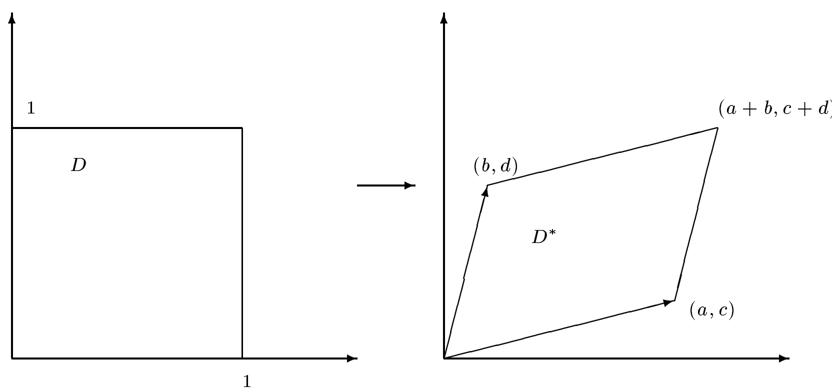

Figura 3.8: Cambio de variable, caso de una transformación lineal

Se tiene que $V(D) = 1$ y

$$\begin{aligned} V(D^*) &= \left| \frac{(b,d)\cdot(-c,a)}{\sqrt{a^2+c^2}} \sqrt{a^2+c^2} \right| \\ &= |ad - bc| \\ &= |\det A|\,. \end{aligned}$$

Así

$$V(D^*) = V(D)\, |\det A|\,.$$

Es fácil ver que una fórmula análoga se cumple para cualquier rectángulo en $I\!R^N$. Más aún, para $f : D^* \to I\!R$, de acuerdo a la definición de integral de

Riemann es razonable escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{D^*} f &\approx \lim_m \sum_{P\in P_m(D)} f(T(c_P))V(T(P)) \qquad (c_P\in P)\\ &\approx \lim_m \sum_{P\in P_m(D)} f(T(c_P))V(P)\,|\det A|\\ &\approx \int_D f\circ T\,|\det A|\,.\end{aligned}$$

Para una transformación más general (no lineal), se puede pensar que la diferencial nos da una aproximación lineal de la transformación en torno a un punto, luego es razonable pensar que el jacobiano de la transformación desempeñará el papel de la matriz A en la fórmula más general. En efecto, se tiene el siguiente teorema (para los detalles, véase la sección 5.5):

Teorema 3.3 (Teorema del Cambio de Variables)
Sea Ω v-medible y $f : U \to V$ un **difeomorfismo**, $\Omega \subseteq U$. *Sea $g : f(\Omega) \to I\!R$ v-integrable. Entonces $g\circ f : \Omega \to I\!R$ es v-integrable y*

$$\int_{f(\Omega)} g(x)dx = \int_\Omega g(f(y))|\det Df(y)|dy$$

La demostración del teorema del cambio de variable se hará posteriormente (teorema 5.7).

Ejemplo 3.8 (integral en coordenadas polares) *Calcular*

$$\int_C \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

donde

$$C = \{(x,y) : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, x\ge 0, y\ge 0\}$$

SOLUCIÓN. Vamos a considerar el cambio de variable

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\end{aligned}$$

es decir, la transformación $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Notar que:

$$DT(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

y así:

$$\det DT(r,\theta) = r.$$

Denotemos

$$\begin{aligned} D &= T^{-1}(C) \\ &= \{(r,\theta) \in I\!R^2 : a \le r \le b, 0 \le \theta \le \pi/2\} \\ &= [a,b] \times [0,\pi/2]. \end{aligned}$$

Luego, en virtud del teorema del cambio de variable :

$$\int_{T(D)} \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_D \log(r^2) r\,dr\,d\theta$$

y, con Fubini:

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \int_0^{\pi/2} \log(r^2) r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \log s\,ds \\ &= \frac{\pi}{4}(b^2\log b^2 - b^2 - a^2\log a^2 + a^2) \end{aligned}$$

□

3.5 Aplicaciones

3.5.1 Centro de masa

Sea $D \subseteq I\!R^2$ una placa y $\rho : D \to I\!R$ la densidad (de masa). Entonces la masa total de la placa está dada por:

$$\iint_D \rho$$

y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de la placa están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dy\,dx}{M},$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dy\,dx}{M}.$$

El caso tridimensional es análogo.

3.5.2 Momento de inercia

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ un sólido de densidad $\rho : W \to \mathbb{R}$. Entonces los momentos de inercia están dados por:

$$I_x = \iiint_W \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx,$$
$$I_y = \iiint_W \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dz\,dy\,dx,$$
$$I_z = \iiint_W \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx.$$

Ejemplo 3.9 *Hallar el centro de masa de la región W comprendida entre el plano xy y la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, de densidad $\rho(x,y)=1$, $\forall (x,y) \in W$.*

Solución. En primer lugar, por simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Para calcular $\bar{z}$, vamos a hacer un cambio de variable a coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta,$$
$$y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,$$
$$z = r\cos\phi.$$

Así

$$\int_W z = \int_{T^{-1}(W)} r\cos\phi\,|\det DT|\,.$$

$$DT(r,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det DT(r,\phi,\theta) &= (-1)^{3+1}(-r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)(-r\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta - r\cos^2\phi\operatorname{sen}\theta)\\ &\quad + (-1)^{3+2}(r\operatorname{sen}\phi\cos\theta)(-r\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta - r\cos^2\phi\cos\theta)\\ &= r^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\theta + r^2\operatorname{sen}\phi\cos^2\theta\\ &= r^2\operatorname{sen}\phi.\end{aligned}$$

Combinando lo anterior:

$$\begin{aligned}\int_W z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(r\cos\phi)r^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta\,dr\\ &= \frac{r^4}{4}\bigg|_0^1 2\pi\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\bigg|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Luego

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{4}{3}\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}.$$

□

3.6 Comentarios acerca del capítulo

3.6.1 Extensión de la integral de Riemann

Algunos de los problemas que presenta la integral de Riemann son que, para ciertas aplicaciones, no integra una familia suficientemente amplia de funciones y que los teoremas de convergencia poseen hipótesis muy fuertes (convergencia uniforme en el caso de la proposición 3.13). Una construcción diferente, basada en la teoría de la medida, la constituye la integral de Lebesgue, que integra una familia mucho más amplia de funciones y cuenta con un teorema de convergencia basado en la convergencia puntual.

3.7 Ejercicios

Ejercicio 3.2 *Sea* $R \subseteq \mathbb{R}^N$ *rectángulo tal que* $V(R) > 0$ *y suponga que* $f : R \to \mathbb{R}$ *es continua en* R. *Suponga que para toda función continua* $g : R \to \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\int_R fg = 0.$$

Pruebe que $f \equiv 0$ *en* R.

Ejercicio 3.3 *Calcular el volumen en* $\mathbb{R}^5$ *de*

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_4^2 + x_5^2 \leq 1\}.$$

Ejercicio 3.4 *Pruebe que la integral de Riemann de una función en* $\mathbb{R}^N$ *es única.*

Ejercicio 3.5 *Suponga que* $F \subseteq \mathbb{R}^N$ *para* $N \geq 2$ *y que* $f : R \to \mathbb{R}$ *es Riemann integrable en* F. *Muestre que* f *puede ser no acotada en* F.

Ejercicio 3.6 *Sea el rectángulo* $R = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *y la función* $f : R \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ 4y^3 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

1. *Muestre que* $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$ *existe y vale 1.*
2. *Muestre que* $\int_R f$ *no existe.*

Capítulo 4

Elementos Básicos de Topología

4.1 Normas, espacios normados

Definición 4.1 *Sea E un espacio vectorial. Una* norma *en E es una función que satisface las siguientes propiedades:*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ *(Desigualdad Triangular)*

Al par ordenado $(E, \|\cdot\|)$ se lo conoce como Espacio normado.

Ejemplo 4.1 En $\mathbb{R}^n$ podemos definir muchas normas:

1. *Norma euclideana* $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. *Norma 1* $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
3. *Norma infinito o uniforme* $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$
4. *Norma p* $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ *para* $1 < p < \infty$

Demostrar que $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ satisfacen efectivamente las propiedades de una norma es tarea sencilla. Un poco más difícil es ver que $\|\cdot\|_p$ con $1 < p < \infty$ es también una norma.

Ejemplo 4.2 Si $E = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} / f \text{es continua}\} = C[a,b]$ entonces definimos

$$\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R} \cup \{0\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Ejemplo 4.3 En $\mathcal{P} = \{\text{polinomios de } \mathbb{R}\}$ definimos

$$\|p\| = |p(1)| + |p(0)| + |p(-1)|$$

lo anterior no es una norma pues no satisface la condición 1 de norma.
En $\mathcal{P}_2 = \{\text{polinomios de grado 2}\}$ si es norma.

En un espacio vectorial E podemos considerar diferentes normas.

Definición 4.2 Normas equivalentes.
Dos normas $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *en* E *se dicen* equivalentes *si existen constantes* c_1 *y* c_2 *positivas tales que:*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Observación 4.1 La relación *ser equivalente a* es una relación de equivalencia.

Cuando a la estructura de espacio vectorial se le agrega una norma, se le dota de propiedades topológicas. Veremos más adelante que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en E entonces $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ tienen las mismas propiedades topológicas.

Definición 4.3 *Dados dos puntos* $x, y \in E$ *definimos la* distancia *entre* x *e* y *por:*

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Observamos que la noción de distancia entre dos puntos depende de la norma considerada.

Ejemplo 4.4 En $M_{n\times m}(I\!R)$ definimos dos normas

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|$$

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$\|A - B\|_\infty = \| \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \|_\infty = 4$$

$$\|A - B\|_1 = 16$$

.

4.2 Conjuntos abiertos, cerrados

El conjunto básico con el cual definimos la topología de un espacio normado es

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in E / \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

que recibe el nombre de *bola abierta de radio* ε *y centro* x_0.

Definición 4.4 *Un conjunto* $A \subseteq E$ *se dice* abierto *si:*

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 t.q. B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Definición 4.5 *Un punto* $x \in E$ *es* interior *a* C *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(x, \varepsilon) \subseteq C$.

Proposición 4.1 Un conjunto es abierto $\Leftrightarrow$ todos sus puntos son interiores.

Proposición 4.2 (Propiedades de los abiertos)

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son abiertos entonces $\cap_{i=1}^n A_i$ es abierto.
2. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos entonces $\cup_{i\in I} A_i$ es abierto
3. E es abierto,ϕ es abierto

Observación 4.2 Sea $\tau = \{A \subseteq E/A \text{ es abierto}\}$, τ se conoce como *topología* en E gracias a que satisface las propiedades 1,2 y 3 de los abiertos.

Definición 4.6 *Sea $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se dice* punto de acumulación *de A si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap (B(x,\varepsilon) \backslash \{x\}) \neq \phi.$$

Observación 4.3 Para ser punto de acumulación de A no es necesario pertenecer a A. Por otra parte, no es suficiente estar en A para ser de acumulación

Ejemplo 4.5

- *Sea $A = (0,1)$. Entonces $x = 0$ es punto de acumulación de A.*
- *Sea $A = (0,1) \cup \{3\}$. Luego $x = 3 \in A$, pero x no es punto de acumulación.*

Definición 4.7 *$A \subseteq E$ es* cerrado *si A contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Teorema 4.1 *$A \subseteq E$ es cerrado $\Leftrightarrow$ A^c es abierto.*

Demostración:($\Rightarrow$) Supongamos que A es cerrado. Sea $x \in A^c$, entonces x no es punto de acumulación de A, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ talque

$$A \cap (B(x,\varepsilon) \backslash \{x\}) = \phi$$

pero esto es equivalente a $B(x,\varepsilon) \backslash \{x\} \subseteq A^c$ y como además $x \in A^c$, tenemos que $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$, y por lo tanto A^c es abierto.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que A^c es abierto. Sea $x \in E$ punto de acumulación de A. Debemos demostrar que $x \in A$. Por contradicción, si $x \in A^c$, como es abierto,$\exists \varepsilon > 0$ talque

$$B(x,\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap A = \phi \Rightarrow B(x,\varepsilon) \backslash \{x\} \cap A = \phi \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

tenemos una contradicción, pues x es punto de acumulación de A. Por lo tanto $x \in A$. $\square$

Teorema 4.2 *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas equivalentes en el espacio E. $A \subseteq E$ es abierto en $(E, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow A$ es abierto en $(E, \|\cdot\|_2)$.*

DemostraciónRecordemos que existen constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Supongamos que $A \subseteq E$ es abierto en $(E, \|\cdot\|_1)$.Sea $x \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in E / \|x - y\|_1 < \varepsilon\} \subseteq A$$

pero entonces

$$\{y \in E / \|x - y\|_2 < c_1\varepsilon\} \subseteq \{y \in E / \|x - y\|_1 < \varepsilon\} \subseteq A$$

o sea, encontramos $\varepsilon c_1 > 0$ tal que

$$B_{\|\cdot\|_2}(x, \varepsilon c_1) \subseteq A$$

Asi que todos los puntos de A son interiores con la norma $\|\cdot\|_2 \Rightarrow A$ es abierto en $(E, \|\cdot\|_2)$. $(\Leftarrow)$Ejercicio. $\square$

Observación 4.4 Todas las nociones que se definan a partir de los conjuntos abiertos de $(E, \|\cdot\|)$ quedan inalteradas cuando se cambia $\|\cdot\|$ por una norma equivalente.

Definición 4.8 *Sea $A \subseteq E$. Definimos los siguientes conjuntos*

- $\mathrm{der}(A) = \{x \in E / \, x \text{ es punto de acumulación de } A\}$
  (derivado de A)

- $\mathrm{adh}(A) = A \cup der(A) = A \cup \{x \in E / \, x \text{ es punto de acumulación de } A\}$
  (adherencia o cerradura de A)

- $\mathrm{int}(A) = \{x \in A / \, x \text{ es punto interior de } A\}$
  (interior de A)

- $\mathrm{Fr}(A) = adh(A) \backslash int(A)$
  (frontera de A)

4.3 Sucesiones.

En el estudio de la topología de un espacio normado, un rol muy importante es jugado por las sucesiones.

Definición 4.9 *Una* sucesión *en el Espacio vectorial E es una función*

$$\begin{array}{ccc} I\!N & \to & E \\ n & \mapsto & x_n \end{array}$$

y se anota usualmente como $\{x_n\}_{n\in I\!N}$.
Una sucesión $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ converge a x si

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N \in I\!N\ t.q. \|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

Observación 4.5 El límite de una sucesión, cuando existe, es único.

Definición 4.10 (Sucesión de Cauchy)
Una sucesión $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ se dice de Cauchy *si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n \in I\!N$ tal que*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Observación 4.6 Las nociones de sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy no cambian ante el cambio por normas equivalentes.

Proposición 4.3 Toda sucesión convergente es sucesión de Cauchy.

Demostracion:Ejercicio. □
Notar que la recíproca de la proposición anterior puede ser falsa.

Ejemplo 4.6 En $\mathbb{Q}^2$ usamos la norma euclideana. La sucesión definida por

$$x_k = ((1 + \frac{1}{k})^k, \frac{1}{k})$$

es de Cauchy pero no converge en $\mathbb{Q}^2$.

Ejemplo 4.7 En $C([-1, 1])$ dotado de la norma

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$$

consideramos la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-(1-x)^n & x>0 \\ -1+(1+x)^n & x\leq 0 \end{cases}$$

Supongamos sin perdida de generalidad que $n \geq m$

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^1 |(1-x)^n - (1-x)^m| dx + \int_{-1}^0 |(1+x)^n - (1+x)^m| dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^m |(1-x)^{n-m} - 1| dx + \int_{-1}^0 (1+x)^m |(1+x)^{n-m} - 1| \\ &\leq \int_0^1 (1+x)^m dx + \int_{-1}^0 (1+x)^m dx \leq \frac{2}{m+1} \end{aligned}$$

es decir,

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{2}{\min\{n,m\}+1}$$

por lo tanto $\{f_n\}$ es de Cauchy. Pero $\{f_n\}$ no tiene limite en $C([-1,1])$ En efecto, supongamos que existe la función límite que llamaremos f. Entonces

$$\|f_n - f\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Como

$$\int_a^1 |f_n - f| dx \leq \int_{-1}^1 |f_n - f| dx$$

entonces

$$\int_a^1 |f_n - f| dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall a \in [-1,1]$$

tomemos $a \in (0,1]$. Como en $[a,1]$, f_n converge uniformemente a 1, entonces

$$\int_a^1 |1-f| dx = 0 \Rightarrow f = 1 \text{ en } [a,1] \quad \forall a \in (0,1]$$

por lo tanto $f(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1]$. Análogamente $f(x) = -1 \quad \forall a \in [-1,0)$ concluimos asi que f no puede ser continua.

Definición 4.11 (Espacio de Banach)
Un espacio vectorial normado E se dice Espacio de Banach *si toda sucesión de Cauchy en E converge en E, es decir*

$$\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}} \subseteq E, \text{ es de Cauchy } \Rightarrow \exists\, x^* \in E, \ t.q\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$$

en este caso E también recibe el nombre de Espacio vectorial completo

Ejemplo 4.8 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente. Esto es una consecuencia del axioma del supremo.

Ejemplo 4.9 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. En efecto, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\; t.q. \quad \|x_k - x_l\|_2 < \varepsilon \quad \forall k, l > N$$

lo que implica que

$$|x_k^i - x_l^i| < \varepsilon \quad \forall k, l > N \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

donde x_k^i es la i-ésima componente de x_k. Por lo tanto la sucesión $\{x_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y en consecuencia converge. Denotemos por x^i su límite. Tenemos asi que dado $\varepsilon > 0$ existe N_i que satisface

$$|x_k^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_i$$

escogiendo $N = max\{N_i \;/ i \in \{1,..,n\}\}$ y llamando x al vector $(x^1,..,x^n)$ tenemos finalmente que

$$\|x_k - x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k^i - x^i|^2} < \varepsilon \quad \forall k > N$$

es decir la sucesión x_k converge a x en $\mathbb{R}^n$

Observación 4.7 Es fácil ver que

$$x_k \longrightarrow x,\;\; en\;, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \Leftrightarrow x_k^i \longrightarrow x^i \quad \forall i \in \{1,..,n\}$$

Ejemplo 4.10 $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_k - A_l\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k, l > N$$

es decir,

$$\max_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} |a_{ij}^k - a_{ij}^l| < \varepsilon$$

en consecuencia cada una de las sucesiones $\{a_{ij}^k\}_{k\in I\!N}$ son de Cauchy en $I\!R$. Cada una de ellas converge entonces a un límite que denotamos a_{ij}. De esta manera, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N_{ij} > 0$ tal que

$$|a_{ij}^k - a_{ij}| < \varepsilon \quad \forall k > N_{ij}$$

escogiendo $N = max\{N_{ij} \ / i \in \{1, .., n\}, j \in \{1, .., m\}\}$, obtenemos

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} |a_{ij}^k - a_{ij}| < \varepsilon \quad \forall k > N$$

o sea, si $A = (a_{ij})$

$$\|A_k - A\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k > n$$

por lo tanto $A_k \longrightarrow A$. El espacio de matrices de dimensión $n \times m$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 4.11 $(C([a, b], I\!R), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Sea $\{f_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in I\!N$ tal que

$$\|f_k - f_l\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad \forall k, l > N$$

en particular, para cualquier $x \in [a, b]$ se tendrá que

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad \forall k, l > N$$

es decir, $\forall x \in [a, b]$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in I\!N}$ es de Cauchy en $I\!R$, y por lo tanto converge a un límite que llamaremos $f(x)$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} f_k(x) = f(x)$$

De esta manera, hemos definido una función $f : [a, b] \to I\!R$. Probaremos que esta función es el límite de la sucesión $\{f_n\}$ en $C([a, b], I\!R)$.
Teníamos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad \forall k, l > N \, \forall x \in [a, b]$$

lo que implica que

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > N \, \forall x \in [a, b]$$

y entonces
$$\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k > N.$$
Con esto hemos probado que
$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$
es decir, f es el límite uniforme de las funciones continuas f_n. Para concluir la demostración de que $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach debemos probar que f es continua.

Proposición 4.4 El límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

Demostración: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que converge uniformemente a una función f. Sea $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que
$$\|f_k - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq N$$
en particular tendremos que
$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in [a,b]$$
pero f_N es una función continua y por lo tanto $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces
$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Con todo esto obtenemos que si $|x - x_0| < \delta$
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$
es decir, f es una función continua. □

Con esto concluimos que $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un Espacio de Banach.

4.4 Contracciones y Teorema de Punto Fijo

Problema 1: Encontrar una solución a:
$$\begin{cases} u' &= f(x,u) \\ u(x_0) &= u_0 \end{cases}$$

Este problema es equivalente a

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))ds$$

Supongamos que $f : I\!R \times I\!R \to I\!R$ es continua, entonces

$$\begin{array}{rcl} T : C([x_0 - a, x_0 + a], I\!R) & \to & C([x_0 - a, x_0 + a], I\!R) \\ u & \mapsto & u_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))ds \end{array}$$

está bien definida y el problema original es equivalente a encontrar u tal que

$$u = T(u)$$

que recibe el nombre de *Problema de punto fijo*
Problema 2: Dado $F : I\!R^n \to I\!R^n$ encontrar solución a:

$$F(x) = 0.$$

Este es un problema de punto fijo, pues se puede escribir

$$x = x + F(x)$$

$$\begin{array}{rccc} T : & I\!R^n & \to & I\!R^n \\ & x & \to & x + F(x) \end{array}$$

y por lo tanto el problema original es equivalente a

$$T(x) = x.$$

En diversas áreas de la ingeniería es común encontrarse con problemas donde se quiere resolver

$$u = T(u), \quad \text{con } T : E \to E$$

o bien $T : K \to K$ en que $K \subseteq E$ es un subconjunto cerrado y E es un espacio de Banach.

Definición 4.12 *$T : K \to K$ se dice* contración *si existe una constante c , $0 < c < 1$ tal que*

$$\|T(u) - T(v)\| \leq c\|u - v\| \quad \forall u, v \in K$$

Teorema 4.3 (Teorema del Punto fijo)
Sea E espacio de Banach, $K \subseteq E$ cerrado. Si $T : K \to K$ es una contracción entonces existe un y solo un punto fijo de T en K

$$\exists! x \in K, \quad T(x) = x.$$

Demostración Veamos primero la existencia. El método de demostración es constructivo.
Sea $x_0 \in K$ cualquiera. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ definida por la recurrencia

$$x_{k+1} = T(x_k), \quad k \in I\!N$$

Demostremos que $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ es de Cauchy.

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_l\| &= \|T(x_{k-1}) - T(x_{l-1})\| \\
&\leq c\|x_{k-1} - x_{l-1}\| \\
&\leq c\|T(x_{k-2}) - T(x_{l-2})\| \\
&\leq c^2\|x_{k-2} - x_{l-2}\|
\end{aligned}$$

supongamos, sin perdida de generalidad que $k \geq l$. Si repetimos el procedimiento anterior, obtenemos

$$\|x_k - x_l\| \leq c^l\|x_{k-l} - x_0\|$$

en particular

$$\|x_{l+1} - x_l\| \leq c^l\|x_1 - x_0\|$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_l\| &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{l+1} - x_l\| \\
&\leq (c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots + c^l)\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_l\| &\leq \sum_{i=l}^{\infty} c^i\|x_1 - x_0\| \\
&= c^l(\sum_{i=0}^{\infty} c^i)\|x_1 - x_0\| \\
&= c^l\frac{1}{1-c}\|x_1 - x_0\| \stackrel{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E, luego tiene un límite $\bar{x} \in E$ y como K es cerrado entonces $\bar{x} \in K$. Por otra parte, si T es contracción, es continua (ejercicio), por lo que tomando límite en la ecuación $x_{k+1} = Tx_k$ obtenemos que

$$\bar{x} = T\bar{x}$$

es decir, $\bar{x}$ es un punto fijo de T.
Veamos que es único. Supongamos que T tiene dos puntos fijos, $x = Tx$ e $y = Ty$, entonces

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\|$$

y como $0 \leq c < 1$, no queda otra posibilidad más que $x = y$. $\square$

Ejemplo 4.12 (Teorema de existencia de soluciones para EDO)
Volvamos al problema original. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y satisface

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq K|u - v|$$

entonces si $x > x_0$

$$\begin{aligned} |T(u) - T(v)| &= |\int_{x_0}^{x} f(s,u(s)) - f(s,v(s))ds| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\ &\leq K\int_{x_0}^{x} |u(s) - v(s)|ds \\ &\leq K\|u - v\|_\infty a \end{aligned}$$

si $x < x_0$ se obtiene el mismo resultado, luego $\|T(u)-T(v)\|_\infty \leq Ka\|u-v\|_\infty$ para toda $u, v \in C([x_0 - a, x_0 + a])$. Si $Ka < 1$ entonces, gracias al teorema del punto fijo de Banach, existe $u \in C([x_0 - a, x_0 + a])$ tal que

$$u = T(u)$$

y este u es único.
Para encontrar una solución se puede iterar, reproduciendo la demostración del teorema de punto fijo de Banach.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Tu_n \\ u_{n+1}(x) &= u_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,u_n(s))ds \end{aligned}$$

este método para encontrar la solución recibe el nombre de Método de Picard.

Ejemplo 4.13 (Existencia de soluciones de una ecuación)
Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y &= \frac{1}{3}\ln(1+x^2+y^2)+5 \end{aligned}$$

este es un problema de punto fijo: $(x,y) = T(x,y)$ con $T : I\!R^2 \to I\!R$ definida por

$$T(x,y) = (\frac{1}{2}\cos(x+y), \frac{1}{3}\ln(1+x^2+y^2)+5)$$

Vamos a demostrar que T es contractante. Como consecuencia, gracias al teorema del punto fijo de Banach, tendremos que el sistema de ecuaciones tiene una y solo una solución en $I\!R^2$. Para ello recordemos el teorema del valor medio: Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ diferenciable, entonces

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(tx + (1-t)y)\cdot(x-y)dt$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq \int_0^1 \|\nabla f(tx+(1-t))y\|\|x-y\|dt \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 1}\{\|\nabla f(tx+(1-t)y)\|\}\|x-y\| \end{aligned}$$

Supogamos que $\|\nabla f(z)\| \leq K$ para todo $z \in I\!R^n$. Entonces $|f(x) - f(y)| \leq K\|x-y\|$.
Apliquemos esto a nuestro problema. Si $T_1(x,y) = (1/2)\cos(x+y)$ entonces

$$\|\nabla T_1(x,y)\| = \|(-\frac{1}{2}\sin(x+y), -\frac{1}{2}\sin(x+y))\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ |T_1(x,y) - T_1(\bar{x},\bar{y})| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|$$

Para $T_2(x,y) = (1/3)\ln(1+x^2+y^2)+5$ hacemos lo mismo:

$$\|\nabla T_2(x,y)\| = \frac{1}{3}\|(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2})\| \leq \frac{2}{3}\sqrt{(\frac{x}{1+x^2})^2 + (\frac{y}{1+y^2})^2}$$

la función $f(z) = z/(1+z^2)$ alcanza su máximo en $z = 1$ (ejercicio) y su máximo es $1/2$. Por lo tanto $\|\nabla T_2(x,y)\| \leq \sqrt{2}/3$ lo que implica

$$|T_2(x,y) - T_2(\bar{x},\bar{y})| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}\|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\|$$

Concluimos entonces que

$$\begin{array}{rcl} \|T(x,y) - T(\bar{x},\bar{y})\| & = & \sqrt{(T_1(x,y) - T_1(\bar{x},\bar{y}))^2 + (T_2(x,y) - T_2(\bar{x},\bar{y}))^2} \\ & \leq & \sqrt{\frac{13}{18}}\|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\| \end{array}$$

es decir, T es contractante pues $\sqrt{13/18} < 1$.

Ejercicio 4.1 Determinar para qué valores de a y b la función

$$T(x,y) = (a\cos(x+y), b\ln(1+x^2+y^2))$$

es una contración

Ejercicio 4.2 Programe su calculadora para encontrar la solución del sistema del ejemplo anterior. Para ello defina $x_0 = 0, y_0 = 0$, y genere una sucesión dada por la siguiente reccurrencia:

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & (1/2)\cos(x_n + y_n) \\ y_{n+1} & = & (1/3)\ln(1 + x_n^2 + y_n^2) + 5 \end{array}$$

4.5 Noción de compacidad

En primer lugar recordemos la noción de subsucesión.

Definición 4.13 Subsuceción
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Consideremos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, es decir, $n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$. Entonces, la nueva sucesión $\{x_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ se llama subsucesión *de $\{x_n\}$ A menudo se anota $n_k = f(k)$ y asi la subsucesión se anota como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Ejemplo 4.14 Las sucesiones siguientes

$$\{(-\frac{1}{2})^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{(-\frac{1}{2})^{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \quad y \quad \{(-\frac{1}{2})^{8n+7}\}_{n\in\mathbb{N}},$$

son subsucesiones de $\{(-\frac{1}{2})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Ejemplo 4.15 La sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por

$$x_n = ((-1)^n, (1 + \frac{1}{n})^n)$$

no converge. Sin embargo la subsucesión $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ si converge y lo hace a $(1, e) \in \mathbb{R}^2$. La subsucesión $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge, pero a $(-1, e) \in \mathbb{R}^2$. Por otra parte la subsucesión $\{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no co nverge.

Ejemplo 4.16 La sucesión $x_n = (2^n, \frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}) \in \mathbb{R}^3$ no converge. En este caso $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes.

Teorema 4.4 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x $\Leftrightarrow$ toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x*

Demostración: ($\Leftarrow$) Directo pues $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
($\Rightarrow$) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, entonces $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \ldots$. Entonces

$$\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \quad \forall k \geq K$$

Por lo tanto $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. □

El siguiente es un teorema fundamental en la topología de $\mathbb{R}$

Teorema 4.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$)
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión acotada. entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene a lo menos una subsucesión convergente.

Demostración: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ acotada implica que existen números reales a_0 y b_0 ,($a_0 < b_0$) tales que

$$x_n \in [a_0, b_0] := I_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definamos

$$I_1^- = [a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}] \qquad I_1^+ = [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$$

entonces en alguno de los dos intervalos I_1^- o I_1^+ existirán infinitos términos de la sucesión original $\{x_n\}_{n\in I\!N}$. Definamos $I_1 = I_1^-$ si es que en I_1^- hay infinitos términos de la sucesión, de lo contrario definimos $I_1 = I_1^+$. Luego elegimos $x_{n_1} \in I_1 = [a_1, b_1]$. Ahora consideramos los intervalos

$$I_2^- = [a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] \qquad I_2^+ = [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1]$$

Al igual que antes, en alguno de estos intervalos existirán infinitos términos de la sucesión, y definimos $I_2 = I_2^-$ si es que en I_2^- hay infinitos términos de la sucesión, o si no $I_2 = I_2^+$. Por la construcción de I_2 pode mos escoger un $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$. Procedemos inductivamente:
Tenemos:

1. $x_{n_i} \in I_i \quad i = 1, ..., k$ y $n_i > n_{i-1}$ para $i = 2, ..., k$

2. En I_k existen infinitos términos de la sucesión

3. $I_i \subseteq I_j$ si $i \geq j$ para $i, j = 1, ..., k$

4. Si $l(I_i)$ denota el largo del intervalo I_i, entonces $l(I_i) = \frac{b_0 - a_0}{2^i}$ para $i = 1, ..., k$

Denotemos $I_k = [a_k, b_k]$ y consideramos los conjuntos

$$I_k^- = [a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \qquad I_k^+ = [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]$$

Como en I_k hay infinitos términos de la sucesión entonces alguno de estos dos conjuntos contiene infinitos términos de la sucesión. Llamemos I_{k+1} a alguno de los que contenga infinitos términos, y elijamos $x_{n_k} \in I_{k+1}$ con $n_{k+1} > n_k$. De esta forma tendremos:

1. $x_{n_i} \in I_i \quad i = 1, ..., k+1$ y $n_i > n_{i-1}$ para $i = 2, ..., k+1$

2. En I_{k+1} existen infinitos términos de la sucesión

3. $I_i \subseteq I_j$ si $i \geq j$ para $i, j = 1, ..., k+1$

4. $l(I_{k+1}) = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$

Hemos generado de esta forma una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in I\!N}$, que es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in I\!N}$. Esta sucesión es de Cauchy pues

$$|x_{n_k} - x_{n_j}| \leq \frac{1}{2^{\min\{i,j\}}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k, j \longrightarrow \infty$$

y por lo tanto converge. □

En dimensión N tenemos lo siguiente:

Teorema 4.6 (Teorema de Bolzano Weierstrass en $I\!R^n$)
Toda sucesión acotada en $I\!R^n$ tiene a lo menos una subsucesión convergente

Demostración En el caso $N = 2$:$\{x_n\}_{n\in I\!N} \subseteq I\!R^2$. Anotemos $x_n = (x_n^1, x_n^2)$.$\{x_n\}_{n\in I\!N}$ acotada implica que existen números reales a y b, $(a < b)$ tales que

$$x_n \in [a,b] \times [a,b] \quad \forall n \in I\!N$$

Por lo tanto $\{x_n^1\}_{n\in I\!N} \subseteq [a,b]$ y por el teorema anterior, esta sucesión de reales tiene una subsucesión convergente que la denotaremos $\{x_{n_k}^1\}_{k\in I\!N}$ y $x_{n_k}^1 \longrightarrow x^1 \in I\!R$. De esta manera la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in I\!N}$ tiene su primera componente convergente. Luego $\{x_{n_k}^2\}_{k\in I\!N} \subseteq [a,b]$ y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $x_{n_{k_i}}^2$ digamos que a $x^2 \in I\!R$

$$x_{n_{k_i}} \longrightarrow x^2$$

pero también se tiene que

$$x_{n_{k_i}}^1 \longrightarrow x^1$$

pues $\{x_{n_{k_i}}\}$ es subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ que ya era convergente.
Por lo tanto la sucesión $\{x_{n_{k_i}}\}_{i\in I\!N}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ cuya primera coordenada converge a x^1 y su segunda coordenada converge a x^2. Concluimos de esto que $x_{n_{k_i}} \longrightarrow (x^1, x^2)$.
Para el caso N general se procede de manera análoga, eligiendo primero una subsucesión cuya primera componente converge, luego a esta subsucesión se le extrae una subsucesión que tendrá sus dos primeras componentes convergentes y asi sucesivamente se escogen subsucesiones secuencialmente hasta obtener una subsucesión con sus N componentes convergentes (lo que asegura la convergencia de la subsucesión). □

Definición 4.14 Conjunto Compacto
Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un conjunto $A \subseteq E$ se dice compacto si toda sucesión en A tiene a lo menos una subsucesión convergente en A, es decir

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \quad \exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \textit{ tal que } x_{n_k} \longrightarrow x \textit{ cuando } k \longrightarrow \infty$$

y además $x \in A$.

Teorema 4.7
En $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$
A es compacto $\Leftrightarrow$ A es cerrado y acotado

Observación 4.8 Recordemos que una caracterización de un conjunto cerrado es que
A cerrado $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $x_n \longrightarrow x$ entonces $x \in A$.

Demostración($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Como A es acotado, existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a un punto x y como A es cerrado, $x \in A$.
($\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ una suseción que converge a x. Como A es compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en A y como ya sabemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge entonces tiene un solo punto de acumulacción que tiene que ser x y por lo tanto $x \in A$.
Si que A no fuese acotado, siempre sería posible encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_{n+1} - x_n\| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal sucesión no puede tener subsucesiones convergentes, pues ninguna subsucesión es de Cauchy.

Observación 4.9 Esta caracterización de conjuntos compactos puede extenderse a todo espacio de dimensión finita, pero en dimensión infinita es falsa

Ejemplo 4.17 En el espacio de Banach $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ consideremos la siguiente sucesión:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ 1 + (n+1)(nx-1) & , \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - (n-1)(nx-1) & , \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n-1} \\ 0 & , \frac{1}{n-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para esta sucesión se cumple que:

- $\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in I\!N$
- $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty = 1 \quad \forall n \in I\!N$
- $\|f_n - f_k\|_\infty = 1 \quad \forall n \neq k$

Entonces $\{f_n\}$ no converge y ninguna subsucesión puede hacerlo, pues no son de Cauchy.
Esto muestra que en $(C([0,1], I\!R), \|\cdot\|_\infty)$ hay sucesiones acotadas que no tienen subsucesiones convergentes. En particular mostramos que $B = \overline{B(0,1)}$, la bola unitaria cerrada, no es compacta.

4.6 Consecuencias de la compacidad

El primer teorema tiene que ver con la siguiente pregunta básica:
Consideremos $f : A \subseteq E \to I\!R$. ¿Es f una función acotada inferiormente y de serlo, existe un mínimo para f, es decir, existe $x \in A$ talque $f(x) = \inf_{y \in A} f(y)$?
Los siguientes teoremas nos dan una respuesta:

Teorema 4.8
Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $f : A \subseteq E \to F$ una función continua con $A \subseteq E$ compacto. Entonces $f(A) = \{f(x) \in F : x \in A\} \subseteq F$ es compacto.

Demostración Sea $\{y_n\}_{n \in I\!N} \subseteq f(A)$ una sucesión cualquiera en $f(A)$. Por la definición de $f(A)$ se tiene que $\forall n \in I\!N$ existe $x_n \in A$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como A es compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k \in I\!N}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n \in I\!N}$, tal que $x_n \longrightarrow x \in A$. Por la continuidad de f, tenemos también que $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) \in f(A)$ cuando $k \longrightarrow \infty$ y por lo tanto $\{y_{n_k}\}_{k \in I\!N}$ es una subsucesión convergente de $\{y_n\}$ y su límite es $f(x) \in f(A)$. Concluimos así que $f(A)$ es compacto. $\square$

Teorema 4.9
Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $A \subseteq E$.
Si $f : A \to I\!R$ es **continua** *y A es* **compacto** *entonces existe $\bar{x} \in A$ tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Demostración El conjunto $f(A) \subseteq I\!R$ es compacto y por lo tanto acotado en $I\!R$, por lo tanto su ínfimo es finito. Sea $\varepsilon > 0$, por definición de ínfimo $\exists x_\varepsilon \in A$ tal que

$$\inf_{y \in A} f(y) \leq f(x_\varepsilon) \leq \inf_{y \in A} f(y) + \varepsilon$$

Eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ construimos una sucesión $\{x_n\}_{n \in I\!N}$ tal que

$$|f(x_m) - \inf_{y \in A} f(y)| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall m \geq n$$

es decir, $f(x_n) \longrightarrow \inf_A f$. Como $\{x_n\}_{n \in I\!N} \subseteq A$ y A es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in I\!N}$ que converge a $\bar{x} \in A$. Como f es continua, $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(\bar{x})$, y como $\{x_{n_k}\}_{k \in I\!N}$ es subsucesión de $\{x_n\}_{n \in I\!N}$ entonces $f(x_{n_k}) \longrightarrow \inf_A f$. Gracias a la unicidad de los límites, se concluye que $f(\bar{x}) = \inf_A f$. $\square$

Corolario 4.1 *Si f es continua y A es compacto, entonces existe $\bar{x}$ tal que*

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \qquad \forall x \in A$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en la siguiente frase: "toda función continua sobre un compacto alcanza su máximo y su mínimo".
La siguiente consecuencia, ya fue anunciada:

Teorema 4.10 *En $I\!R^n$ todas las normas son equivalentes.*

Demostración Basta demostrar que cualquier norma es equivalente a la norma euclideana.
Sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en $I\!R^n$
Si $x \in I\!R^n$, x se escribe como $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es al base canónica de $I\!R^n$ y $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq I\!R$ entonces

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2}$$

La última desigualdad en esta expresión se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a los vectores $(|x_1|, ..., |x_n|)$ y $(\|e_1\|, ..., \|e_n\|)$.
Definiendo la constante $c_2 = (\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2)^{1/2}$ tenemos que

$$\|x\| \leq c_2 \|x\|_2 \qquad \forall x \in I\!R^n$$

Lo anterior muestra que la función $\|\cdot\| : (I\!R^n, \|\cdot\|_2) \to I\!R$ es continua, en efecto sea $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión que converge a x en $(I\!R^n, \|\cdot\|_2)$, es decir, $\|x_n - x\|_2 \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \leq c_2\|x_n - x\|_2 \longrightarrow 0$$

por lo tanto $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ cuando $n \longrightarrow \infty$.
Sea $S = \{x \in I\!R^n : \|x\|_2 = 1\}$. Este es un conjunto cerrado y acotado en $(I\!R^n, \|\cdot\|_2)$ y por lo tanto es compacto. Por el teorema anterior, existe entonces $\bar{x} \in S$ tal que

$$\|\bar{x}\| \leq \|x\| \qquad \forall x \in S$$

Sea $x \neq 0 \in I\!R^n$, entonces

$$\frac{x}{\|x\|_2} \in S$$

y por lo tanto

$$\|\bar{x}\| \leq \|\frac{x}{\|x\|_2}\| \quad \Rightarrow \quad \|\bar{x}\|\|x\|_2 \leq \|x\| \quad \forall x \in I\!R^n$$

Definiendo $c_1 = \|\bar{x}\|$ obtenemos entonces que

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_2 \qquad \forall x \in I\!R^n$$

concluyendo así la demostración. $\square$

Definición 4.15 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Sea $f : A \subseteq E \to F$. f es* uniformemente continua *en A si*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad tq.\ \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

Observación 4.10 f uniformemente continua en $A \Rightarrow f$ continua en A

Finalizamos el capitulo con el siguiente teorema

Teorema 4.11 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Sea $f : A \subseteq E \to F$ continua y A compacto. Entonces f es uniformemente continua en A.*

Demostración Supongamos que f no es uniformemente continua en A. Entonces

$$\exists\varepsilon > 0\, \forall\delta > 0\, \exists x, y \in A\, tq.\ \|x - y\|_E < \delta \ \wedge\ \|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon$$

Sea $n \in I\!\!N$, tomamos $\delta = 1/n > 0$ y escogemos $x_n, y_n \in A$ tales que

$$\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(y_n)\|_F > \varepsilon$$

Como $\{x_n\}_{n\in I\!\!N} \subseteq A$ y A es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in I\!\!N}$ de $\{x_n\}_{n\in I\!\!N}$ que converge a un $x \in A$. A su vez la sucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in I\!\!N} \subseteq A$ posee una subsucesión $\{y_{n_{k_l}}\}_{l\in I\!\!N}$ convergente, $y_{n_{k_l}} \longrightarrow y \in A$. Notemos que $\{x_{n_{k_l}}\}$ es una subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ t por lo tanto también converge a x. Lo anterior implica que $(x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}) \longrightarrow (x - y)$ cuando $l \longrightarrow \infty$, pero por otra parte tenemos que

$$\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n}\ \forall n \in I\!\!N \ \Rightarrow\ \|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}\|_E < \frac{1}{n_{k_l}} \longrightarrow 0$$

es decir, $(x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}) \longrightarrow 0$ cuando $l \longrightarrow \infty$ lo que implica que $x = y$.
Por la elección de las sucesiones tenemos que

$$\|f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}})\|_F > \varepsilon \quad \forall l \in I\!\!N$$

Tomando límite cuando $l \longrightarrow \infty$ y gracias a la continuidad de f obtenemos que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \geq \varepsilon > 0$$

lo que es imposible pues $x = y$. $\square$

4.7 Ejercicios

1. Dados dos conjuntos A, B en un espacio vectorial normado E, demuestre

   (a) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$

   (b) $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subset \text{int}(A \cup B)$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)

   (c) $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$.

   (d) $\text{adh}(A \cap B)) \subset \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad).

   (e) $\text{adh}(A) = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$.

   (f) $A \subset B \Rightarrow \text{int}(A) \subset \text{int}(B)$ y $\text{adh}(A) \subset \text{adh}(B)$.

   (g) $\text{int}(A) \cap B = \phi \Leftrightarrow \text{int}(A) \cap \text{adh}(B) = \phi$.

   (h) $\text{adh}(A) = \vec{E}$ y $\text{int}(B) \cap A = \phi \Rightarrow \text{int}(B) = \phi$.

   (i) $\text{int}((A^c)) = (\text{adh}(A))^c$.

   (j) $(\text{adh}A^c) = (\text{int}(A)^c)$.

2. Sean $A, B \subset I\!\!R^n$. Se define $A + B = \{\vec{x} \ / \ \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}$.

   (a) Demuestre que $A + B$ es abierto si A es abierto

   (b) Dé un ejemplo en $I\!\!R$ donde A y B sean cerrados pero $A + B$ no sea cerrado.

3. Verificar que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : x^2 + xy < x\} \text{ es abierto en } I\!\!R^2$$

4. Encontrar en $I\!\!R^2$ un conjunto que no sea abierto ni cerrado.

5. Considere el espacio vectorial $C([0, 1], I\!\!R)$ de las funciones continuas $f : [0, 1] \to I\!\!R$. Definamos la sucesión $\{f_k\}$ por:

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ -2^k(x - 1/2) + 1 & \text{si } x \in [1/2, 2^{-k} + 1/2] \\ 0 & \text{si } x \in [2^{-k} + 1/2, 1] \end{cases}$$

(a) Verificar que $f_k \in C([0,1], I\!R)\ \forall k \in I\!N$.

(b) Se define la norma $\|\cdot\|_1$ en $C([0,1], I\!R)$, como $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(x)|dx$. Demuestre que para esta norma $\{f_k\}$ es de Cauchy y no es convergente.

(c) Sea $A([0,1], I\!R)$ el espacio vectorial de las funciones acotadas de $[0,1]$ en $I\!R$, dotado de la norma $\|\ \|_\infty$, definida por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, demuestre que $\{f_k\}$ es convergente en este espacio.

6. Sea d la distancia en $I\!R^n$, asociada a alguna norma en $I\!R^n$ ($d(x,y) = \|x-y\|$). Sean $A \subseteq I\!R^n$ y $B \subseteq I\!R^n$ dos conjuntos no vacíos, demuestre:

   (a) $C = \{x \in I\!R^n / d(x,A) = d(x,B)\}$ es cerrado

   (b) $D = \{x \in I\!R^n / d(x,A) < d(x,B)\}$ es abierto donde $d(x,A) = \inf\{d(x,y)/y \in A\}$.

   (c) Si A y B son cerrados y disjuntos entonces existen dos abiertos no vacíos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$ y $U \cap V = \phi$.

7. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de una variable real con coeficientes reales. Definamos la función $\|\cdot\| : E \to I\!R$ por

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)| \text{ para todo } p \in E$$

   (a) Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio E.
   Hint: Use que un polinomio tiene exactamente tantos ceros como el grado, excepto si es el polinomio nulo.

   (b) Considere la función $\ell_1 : E \to I\!R$ definida por

$$\ell_1(p) := p(1/2) \text{ para todo } p \in E$$

   Demuestre que:

   i. la función ℓ_1 es lineal y verifica la desigualdad:

$$\exists K \in I\!R \text{ tal que } |\ell_1(p)| \leq K\|p\| \text{ para todo } p \in E$$

   ii. La función ℓ_1 es continua.

(c) Demuestre que si $\{p_k\}$ es una sucesión en E convergente a un polinomio p entonces

$$p_k(x) \to p(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

(d) Considere la sucesión $\{p_k\}$ en E definida por $p_k(x) = x^k$ y demuestre que

i. $\|p_k\| = 1$ para todo $k \in I\!N$.

ii. $\{p_k\}$ no tiene punto de acumulación.

iii. $B(0,1)$ en E no es compacta.

8. Sea T una función tal que T^k es contractante. Demuestre que T tiene un único punto fijo.

9. Sea $\| \, \|_1$ una norma en el e.v. E y $\{a_k\}$ una sucesión de Cauchy respecto de dicha norma. Demostrar que si $\| \, \|_2$ es otra norma en E equivalente a $\| \, \|_1$, entonces $\{a_k\}$ es sucesión de Cauchy también respecto a la $\| \, \|_2$. Si E es Banach respecto a $\| \, \|_1$ se puede decir que es Banach con $\| \, \|_2$?

10. Demuestre que dos sucesiones de Cauchy (x_k) y (y_k) en $I\!R^n$ tiene el mismo límite ssi $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = 0$.

11. Sean $A, B \subseteq I\!R^k$. Se define $A + B = \{x/x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

(a) Demuestre que $A + B$ es compacto si A y B son compactos.

(b) Demuestre que si A y B es cerrados y $A(oB)$ acotado entonces $A + B$ es cerrado.

12. Demuestre que si A es un conjunto compacto y $B \subset A$, entonces $\bar{B} =$ adh$B$ es un conjunto compacto.

13. a) Si $\{A_i\}_{i\in I\!N}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos (no vacíos) en un e.v.n, demuestre que $\bigcap\limits_{i\in I\!N} A_i \neq \phi$.

b) i) Dé un ejemplo en $I\!R$ de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

ii) Dé un ejemplo en $I\!R$ de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

14. Sea X un espacio vectorial normado, y sean $A, B \subset X$ cerrados y sean $C, D \subset X$ compactos. Probar que

    (a) Si $d(C, D) = \inf\limits_{x \in C, y \in D} \|x - y\| = 0$ entonces $C \cap D \neq \emptyset$.

    (b) Si $d(A, B) = \inf\limits_{x \in C, y \in D} \|x - y\| = 0$ entonces no necesariamente $A \cap B \neq \emptyset$.

15. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y$ dos espacios vectoriales normados. Definimos $(X \times Y, \|\cdot\|)$ como el espacio vectorial normado donde $(x, y) \in X \times Y \iff x \in X \wedge y \in Y$ y la norma en $X \times Y$ se define como $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ compactos. Demuestre que entonces $A \times B$ es compacto en $X \times Y$.

16. Sea $U = I\!R^{I\!N}$, es decir, el espacio de las sucesiones. Considere en U la norma
$$\|\vec{x}\| = \sup\{|x_i|, / i \in I\!N\}$$
Indique cual(es) de los siguientes conjuntos son compactos. $B_0(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in U / |x_i| \leq 1, \forall i \in I\!N\}$
$B_1(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in U / |x_i| \leq \frac{1}{i}, \forall i \in I\!N\}$
$B_2(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in U / |x_i| = 1, \forall i \in I\!N\}$

17. Demuestre que en $I\!R^n$, $\|\cdot\|_p$ es efectivamente una norma para $1 \leq p \leq \infty$. Para ello le será útil demostrar primero la siguiente desigualdad de numeros reales: (Desigualdad de Minkowsi) Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\forall\, a, b > 0$
$$ab < \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$
Para probar esto recuerde que log es una función concava e inyectiva.

18. Sea E un e.v.n. Una función $f : E \to I\!R$ es continua en x_0 si
$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0, \varepsilon)))$$
Sea $L : E \to I\!R$ una función lineal. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) L es continua en E.

(b) L es continua en $0 \in E$.

(c) $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |Lx| < +\infty$

Sea $E' = \{L : E \to I\!R / L \quad \text{es lineal y continua}\}$ este conjunto se conoce como espacio dual de E. Pruebe que E' es un espacio vectorial, y que

$$\|L\|_{E'} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |Lx|$$

define una norma en E'. Pruebe también que E' es un espacio de Banach. (Aunque E no lo sea).

19. Demuestre la suguiente caracterización de espacios de Banach. Sea E un e.v.n.

$$E \text{ es un espacio de Banach}$$

sí y sólo sí

$$(\forall \{x_n\}_{n \in I\!N} \subseteq E \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ converge en } E)$$

Indicación: Para la implicación ($\Leftarrow$), dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n \in I\!N}$ en E, construya una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in I\!N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$. Luego concluya.

20. Muestre que la ecuación integral

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x-y} \cos(u(y)) dy$$

tiene una y sólo una solución en el espacio $C([0,1], I\!R)$. Para ello defina el operador

$$F(u)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x-y} \cos(u(y)) dy$$

y demuestre que es contractante. En $C([0,1], I\!R)$ use la norma del supremo.

21. Considere la ecuación integral

$$u(x) = 5 + \int_0^x \sin(u(s) + x)ds$$

Muestre que la ecuación posse una y solo una solución en $C([0, 1/2], I\!R)$

Capítulo 5

Complementos de Cálculo Diferencial

5.1 Teorema de la Función Inversa

Motivación: Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal. Para que L sea biyectiva es necesario y suficiente que la matriz asociada (matriz representante) sea invertible, y en este caso la matriz representante de la función inversa será la inversa de la matriz representante de L.
Si $Lx_0 = b_0$ y queremos resolver la ecuación $Lx = b_0 + \Delta b$, la solución será

$$x = x_0 + \Delta x = L^{-1}b_0 + L^{-1}\Delta b$$

Cuando $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, F es localmente *como* una función lineal (afín), y por lo tanto es razonable pensar que la biyectividad local de F esté relacionada con la biyectividad de su aproximación lineal.

Teorema 5.1 (Teorema de la Función Inversa)
Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que para $a \in \Omega$, $DF(a)$ (Jacobiano) es invertible y que $F(a) = b$.Entonces

1. *Existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y $F : U \to V$ es biyectiva.*

2. *Si $G : V \to U$ es la inversa de F, es decir, $G = F^{-1}$, entonces G es también de clase $\mathcal{C}^1$ y $DG(b) = [DF(a)]^{-1}$.*

Antes de dar la demostración veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1 Sea $F(x,y) = (x^2 + \ln y, y^2 + xy^3)$, entonces $F(1,1) = (1,2)$ Consideremos la ecuación $F(x,y) = (b_1, b_2)$

$$\begin{aligned} x^2 + \ln y &= b_1 \\ y^2 + xy^3 &= b_2 \end{aligned}$$

con (b_1, b_2) "cerca"de $(1,2)$.

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1/y \\ y^3 & 2y + 3xy^2 \end{pmatrix}$$

evaluando el Jacobiano en $(x,y) = (1,1)$ obtenemos

$$DF(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

que es una matriz invertible!.
Concluimos entonces, gracias al teorema de la función inversa que la ecuación tiene una y solo una solución $(x(b_1,b_2), y(b_1,b_2))$ para cualquier (b_1,b_2) cercano al punto $(1,2)$. Más aún $(x(b_1,b_2), y(b_1,b_2))$ está cerca de $(1,1)$ y depende de (b_1,b_2) de manera diferenciable.

Ejemplo 5.2 Cambio de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

Llamaremos Φ al cambio de variables. El Jacobiano de la transformación en el punto $r = 1, \phi = \pi/4, \theta = \pi/4$ es

$$D\Phi(1, \pi/4, \pi/4) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es invertible pues su determinante es igual a $\sqrt{2}/2$. En general se tiene que $|D\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2 \sin\phi$ que es distinto de cero excepto si $r = 0$ o si $\sin\phi = 0$. Por lo tanto, salvo en el eje z la transformación Φ es localmente biyectiva.

Previo a la demostración del teorema, recordemos tres resultados que serán de utilidad.

1. En $M_{n\times n}(I\!R)$ consideramos la norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \qquad \text{(Norma de Frobenius)}$$

   Entonces $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F\|x\|_2$ si $x \in I\!R^n$, $A \in M_{n\times n}$.
   Además $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$, si $A, B \in M_{n\times n}$

2. Corolario del teorema del Punto Fijo de Banach: Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach,$C \subseteq E$ es un conjunto cerrado y $F : C \to C$ es una función contractante, entonces existe un único $x \in C$ tal que $F(x) = x$.

3. Teorema del valor medio: Sea $F : U \to I\!R^n$ de clase $\mathcal{C}^1$, U un conjunto convexo.Si $\|DF_i(x)\| \leq A_i \quad \forall x \in U$, entonces $\|F(x) - F(y)\| \leq \sqrt{A_1^2 + ... + A_n^2}\|x - y\| \quad \forall x, y \in U$.
   En realidad se tiene que si $\|DF(x)\| \leq C \quad \forall x \in U$ entonces $\|F(x) - F(y)\| \leq C\|x - y\|$, pues

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\| &= \|\int_0^1 DF(tx + (1-t)y)\cdot(x-y)dt\| \\
&\leq \int_0^1 \|DF(tx + (1-t)y)\cdot(x-y)\|dt \\
&\leq \int_0^1 \|DF(tx + (1-t)y)\|\|x-y\|dt \\
&\leq C\|x-y\|
\end{aligned}$$

Demostración (Teorema de la Función de Inversa)
Observemos que si F es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces la función

$$\begin{aligned}
DF : \Omega &\to M_{n\times n} \\
x &\mapsto DF(x)
\end{aligned}$$

es continua pues

$$\|DF(x) - DF(x_0)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)|^2}$$

y como todas las derivadas parciales son continuas, dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_{ij} > 0$ tales que $\|x-x_0\| < \delta_{ij} \Rightarrow |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{n}$, entonces escogiendo $\delta = \min_{i,j}\delta_{ij} > 0$ tenemos que $\|x-x_0\| < \delta \Rightarrow \|DF(x)-DF(x_0)\|_F < \sqrt{n^2(\frac{\varepsilon}{n})^2} = \varepsilon$.
Queremos demostrar que existen abiertos U y V tales que $F: U \to V$ es biyectiva, lo que se puede expresar en otras palabras como: Dado $y \in V$ existe un único $x \in U$ que es solución de la ecuación $F(x) = y$. Además

$$\begin{array}{rlll} F(x) = y & \Leftrightarrow \; y - F(x) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow \; DF(a)^{-1}(y-F(x)) & = & 0 \quad \text{pues } DF(a) \text{ es invertible} \\ & \Leftrightarrow \; x + DF(a)^{-1}(y-F(x)) & = & x \end{array}$$

Entonces dado $y \in V$, resolver la ecuación $F(x) = y$ es equivalente a encontrar un punto fijo a la función $\varphi_y(x) = x + DF(a)^{-1}(y - F(x))$ Como DF es continua en a, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x \in B(a,\varepsilon) \Rightarrow \|DF(x)-DF(a)\|_F < \frac{1}{2\sqrt{n}\|DF(a)^{-1}\|_F}$$

Para probar que $F: B(a,\varepsilon) \to I\!R^n$ es inyectiva, basta probar que φ_y es contractante, en efecto $F(x_1) = y \wedge F(x_2) = y \Rightarrow \varphi_y(x_1) = x_1 \wedge \varphi_y(x_2) = x_2$ y si φ_y es contractante entonces $\|\varphi_y(x_1)-\varphi_y(x_2)\| \leq C\|x_1-x_2\| \Rightarrow \|x_1-x_2\| \leq C\|x_1-x_2\|$ y como $C < 1$, $x_1 = x_2$.
Observemos que φ_y es de clase $\mathcal{C}^1$. Para probar que es contractante acotamos la norma de su derivada:

$$D\varphi_y(x) = I - DF(a)^{-1}DF(x) = DF(a)^{-1}(DF(a)-DF(x))$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

$$\|D\varphi_y(x)\|_F \leq \|DF(a)^{-1}\|_F\|DF(a)-DF(x)\|_F \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

la última desigualdad es válida si $x \in B(a,\varepsilon)$.
Entonces como $B(a,\varepsilon)$ es convexa y $\|D(\varphi_y)_i(x)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ para $i = 1,...,n$, obtenemos

$$\|\varphi_y(x)-\varphi_y(z)\| \leq \|x-z\|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2} = \frac{1}{2}\|x-z\| \quad \forall x,z \in B(a,\varepsilon)$$

Si definimos $U = B(a, \varepsilon)$ y $V = F(U)$, entonces $F : U \to V$ es biyectiva. Veamos que V es abierto.
Sea $\bar{y} \in V$ y $\bar{x} \in B(a, \varepsilon)$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Hay que demostrar que existe $\rho > 0$ tal que si $y \in B(\bar{y}, \rho)$ entonces existe $x \in U$ tal que $F(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi_y(x)$, es decir, $B(\bar{y}, \rho) \subseteq F(U) = V$.
Sea $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, 2r) \subseteq U$, y $x \in \bar{B}(\bar{x}, r)$

$$\begin{aligned}
\varphi_y(x) - \bar{x} &= \varphi_y(x) - (\bar{x} + DF(a)^{-1})y - F(\bar{x}))) + DF(a)^{-1}(y - \bar{y}) \\
&= \varphi_y(x) - \varphi_y(\bar{x}) + DF(a)^{-1}(y - \bar{y})
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x) - \bar{x}\| &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(\bar{x})\| + \|DF(a)^{-1}(y - \bar{y})\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\| + \|DF(a)^{-1}\|\|y - \bar{y}\|
\end{aligned}$$

Si escogemos $\rho = r/(2\|DF(a)^{-1}\|_F)$ tendremos que $\forall y \in B(\bar{y}, \rho)$ la función

$$\varphi_y : \bar{B}(\bar{x}, r) \to \bar{B}(\bar{x}, r)$$

es una contracción y por lo tanto tiene un único punto fijo $x \in \bar{B}(\bar{x}, r) \subseteq U$ tal que

$$\varphi_y(x) = x \Rightarrow \; F(x) = y$$

Concluimos así que $B(\bar{y}, \rho) \subseteq V$, es decir, V es abierto.
Resta estudiar la diferenciabilidad de la función inversa. Sean $y, y + k \in V$ entonces existen únicos $x, x + h \in U$ tales que $y = F(x)$ y $y + k = F(x + h)$ entonces

$$\begin{aligned}
&F^{-1}(y + k) - F^{-1}(y) - DF(x)^{-1}k = h - DF(x)^{-1}k = \\
&DF(x)^{-1}(F(x + h) - F(x) - DF(x)h)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|k\|}\|F^{-1}(y + k) - F^{-1}(y) - DF(x)^{-1}k\| \leq \\
&\|DF(x)^{-1}\|\frac{\|F(x + h) - F(x) - DF(x)h\|}{\|h\|}\frac{\|h\|}{\|k\|}
\end{aligned}$$

Probaremos ahora que $\|h\|/\|k\| \leq C < \infty$ lo que implica que $h \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow 0$ y como F es diferenciable en el punto x, el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $k \longrightarrow 0$, obligando asi a que el lado izquierdo tienda a cero también, lo que por definición significa que F^{-1} es diferenciable en y y

$$DF^{-1}(y) = [DF(x)]^{-1}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} \|h - DF(a)^{-1}k\| &= \|h - DF(a)^{-1}(F(x+h) - F(x))\| \\ &= \|h + x - DF(a)^{-1}(F(x+h) - y) - x + \\ &\quad DF(a)^{-1}(F(x) - y)\| \\ &= \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|h\| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|h\| - \|DF(a)^{-1}k\| \leq \|h - DF(a)^{-1}k\| \leq 1/2\|h\|$$

lo que implica que

$$1/2\|h\| \leq \|DF(a)^{-1}k\| \leq \|DF(a)^{-1}\|\|k\|$$

es decir,

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq 2\|DF(a)^{-1}\| < \infty$$

que es lo que se quería probar.
La continuidad de $DF^{-1}(y) = [DF(F^{-1}(y))]^{-1}$ se obtiene de la regla de Cramer para obtener la inversa de una matriz. Para una matriz invertible A se tiene que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\text{cofactores}A]^t$$

y donde "cofactores A"es una matriz formada por los distintos subdeterminantes de A que se obtienen al sacarle una fila y una columna a A. Entonces como F es continuamente diferenciable, sus derivadas parciales son continuas, y gracias a la formula de Cramer las derivadas parciales de F^{-1} serán continuas también pues son productos y sumas de las derivadas parciales de F y cuociente con el determinante de $DF(F^{-1}(y))$ que es distinto de cero y continuo por la misma razón. $\square$

5.2 Teorema de la Función Implícita

Supongamos que se tiene una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y consideremos una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0$$

Es entonces natural hacer la siguiente pregunta: Es posible despejar y en función de x?
Supongamos que sí, es decir, existe una función $y(x)$ que satisface

$$f(x, y(x)) = 0$$

supongamos además que f e $y(x)$ son diferenciables, entonces podemos derivar la ecuación anterior con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \quad \text{Derivación implícita}$$

Notemos que para poder realizar este cálculo es necesario que $\partial f/\partial y$ sea distinto de cero..

Ejemplo 5.3 Consideremos la siguiente ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

Es posible despejar y en función de x? Evidentemente la respuesta a esta pregunta es que no es posible despejar globalmente una variable en función de la otra, pero si (x_0, y_0) es un punto que satisface la ecuación, es decir, $x_0^2 + y_0^2 = 0$ y además $y_0 \neq 0$, entonces es posible despejar localmente y en función de x (es decir, en una vecindad de (x_0, y_0)). Además derivando la ecuación se tiene que

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Sin embargo si $y_0 = 0$ es imposible despejar y en función de x en torno al punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.4 Consideremos ahora un caso más general que el anterior. Suponga que se tienen las variables $x_1, ..., x_m$ e $y_1, ..., y_n$ relacionas por n ecuaciones (sistema de ecuaciones),
$F_i(x_1, ...x_m, y_1, ...y_n) = 0, \quad i : 1, ..., n$.Esto se puede escribir como

$$\begin{array}{rcl} F : I\!R^m \times I\!R^n & \to & I\!R^n \\ (x_1, .., x_m, y_1, ..., y_n) & \mapsto & F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces $F(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0$.
Es posible despejar las variables y, en función de las variables x? Es decir, existen funciones $y_j(x_1, ..., x_m), j = 1, ..., n$ tales que

$$F(x_1, ..., x_m, y_1(x_1, ..., x_x), ..., y_n(x_1, ..., x_m)) = 0.$$

Veamos el caso particular de un sistema lineal. Sea L una matriz $L = [AB] \in M_{n\times(n+m)}$, y consideremos el sistema

$$Ax + By = b$$

En este caso es posible despejar y en función de x cuando B es invertible:

$$y(x) = B^{-1}b - B^{-1}Ax$$

Teorema 5.2 (Teorema de la Función Implícita)
Sea $F : \Omega \subseteq I\!R^{m+n} \to I\!R^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $(a, b) \in I\!R^m \times I\!R^n$ un punto tal que $F(a, b) = 0$. Escribimos entonces

$$DF(a, b) = [D_xF(a, b)\ D_yF(a, b)]$$

y supongamos que $D_yF(a, b)$ es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq I\!R^{m+n}, W \subseteq I\!R^m$ con $(a, b) \in U$ y $a \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y

$$F(x, y) = 0$$

esto define una función $G : W \to I\!R^n$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ y que satisface

$$F(x, G(x)) = 0, \quad \forall x \in W$$

además $DG(x) = -[D_yF(x, G(x))]^{-1}D_xF(x, G(x))$ para todo $x \in W$ y evidentemente $G(a) = b$.

Al igual que en el teorema de la función inversa veamos un ejemplo antes de dar la demostración del teorema.

Ejemplo 5.5 Considere el sistema de ecuaciones

$$x^2 + \text{sen}(y) + \cos(yz) - w^3 - 1 = 0$$

$$x^3 + \cos(yx) + \text{sen}(z) - w^2 - 1 = 0$$

a) Muestre que es posible despejar (y, z) en función de (x, w) en una vecindad del punto $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 0, 0)$. Calcular $\frac{\partial y}{\partial x}(0, 0)$.
b) Es posible despejar (x, y) en función de las variables (z, w) en una vecindad de $(0, \pi, 0, 0)$? Que se puede decir de despejar (x, w) en función de (y, z)?
Solución:

a) Para este problema se tiene que la función F es:
$F(x, y, z, w) = (x^2 + \text{sen}(y) + \cos(yz) - w^3 - 1, x^3 + \cos(yx) + \text{sen}(z) - w^2 - 1)$.
Entonces F es de clase $\mathcal{C}^1$ y $F(0, 0, 0, 0) = (0, 0)$. Además

$$D_{(y,z)}F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial y & \partial F_1/\partial z \\ \partial F_2/\partial y & \partial F_2/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y - \text{sen}(yz)z & -\text{sen}(yz)y \\ -\text{sen}(yx)x & \cos(z) \end{pmatrix}$$

luego

$$D_{(y,z)}F(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es invertible. Luego, gracias al terorema, es posible despejar (y, z) en función de (x, w) de manera diferenciable en una vecindad del punto $(0, 0)$. Si derivamos las ecuaciones con respecto a x obtenemos

$$2x + \cos(y)\frac{\partial y}{\partial x} - \cos(yz)(y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial x}) = 0$$

$$3x^2 - \text{sen}(yx)(\frac{\partial y}{\partial x}x + y) + \cos(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

evaluando en el punto $(0, 0, 0, 0)$ se tiene que $\partial y/\partial x(0, 0) = 0$.
b)En este caso se tiene que $F(0, \pi, 0, 0) = (0, 0)$ y

$$D_{(x,y)}F(x, y, w, z) = \begin{pmatrix} 2x & \cos(y) - \text{sen}(yz)z \\ 3x^2 & -\text{sen}(yx)x \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$D_{(x,y)}F(0,\pi,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esta última no es una matriz invertible por lo que el teorema no es aplicable. Si se quisiera despejar (x,w) en función de (y,z) debemos observar la matriz

$$D_{(x,w)}F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x & -3w^2 \\ 3x^2 & -2w \end{pmatrix}$$

que tampoco es invertible en los puntos $(0,0,0,0)$ y $(0,\pi,0,0)$, por lo que nuevamente el teorema no es aplicable.

Demostración (Teorema de la Función Implícita)
Definamos la función

$$\begin{aligned} f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = (x, F(x,y)) \end{aligned}$$

que es evidentemente una función de clase $\mathcal{C}^1$ gracias a que F lo es. Su Jacobiano en el punto (a,b) es

$$Df(a,b) = \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ D_xF(a,b) & D_yF(a,b) \end{pmatrix}$$

que es invertible ya que por hipótesis $D_yF(a,b)$ lo es. Además $f(a,b) = (a,0)$. Podemos entonces aplicar el Teorema de la Función Inversa a la función f. Existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ tales que $(a,b) \in U$, $(a,0) \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es biyectiva con inversa de clase $\mathcal{C}^1$. Definamos ahora el conjunto $W = \{z \in \mathbb{R}^m / (z,0) \in V\}$, entonces $a \in W$ y W es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ pues V es abierto (Ejercicio: Demostrar que W es abierto). Luego, para cada $z \in W$ la ecuación $f(x,y) = (z,0)$ tiene un único par (x_z, y_z) como solución, es decir,

$$(x_z, F(x_z, y_z)) = (z, 0)$$

esto último implica que $x_z = z$ y por lo tanto $F(z,y) = 0$. Como y_z es único dado z, esto define una función $G(z) = y_z$. Evidentemente $G(a) = b$, y

$$(z, y_z) = f^{-1}(z,0) = (z, G(z))$$

De esta forma, G es la función que estamos buscando y como f^{-1} es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces la ecuación anterior dice que G es de clase $\mathcal{C}^1$ también. Se tiene que G satisface la ecuación $F(z, G(z)) = 0$, y como F y G son de clase $\mathcal{C}^1$ podemos calular al Jacobiano de G usando esta ecuación y la regla de la cadena

$$D_x F(z, G(z)) I_{m\times m} + D_y F(z, G(z)) DG(z) = 0$$

de donde se obtiene el resultado

$$DG(z) = -[D_y F(z, G(z))]^{-1} D_x F(z, G(z))$$

para todo $z \in W$. $\square$

5.3 Geometría y Multiplicadores de Lagrange

La pregunta básica que queremos responder en esta sección, es cuando una ecuación como $g(x, y, z) = 0$ define una superficie?
Los dos ejemplos siguientes son muy elocuentes

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
2. $x(z - x^2 + y^2) = 0$

1. ciertamente es una superficie (es la supercicie de la esfera de radio 1 y centro en el origen). Sin embargo 2. **no es** una superficie.
Este ejemplo nos muestra que la respuesta es **local**. El problema con la superficie 2. ocurre en el punto $(0, 0, 0)$ donde $\nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
En general, si el punto (x_0, y_0, z_0) es tal que $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces la ecuación $g(x, y, z) = 0$ define una superficie, al menos en una vecindad de (x_0, y_0, z_0); en efecto, si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces alguna derivada parcial es no nula, supongamos sin perdida de generalidad que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

entonces, por el teorema de la función implícita, es posible despejar y en función de (x, z), es decir, podemos escribir $y = y(x, z)$, y por lo tanto el conjunto $S = \{(x, y, z)/g(x, y, z) = 0\}$ es localmente el grafo de una función, es decir, es una superficie.

Definición 5.1 (Espacios Normal y Tangente)
Sea $g : I\!R^3 \to I\!R$ una función diferenciable. Sea (x_0, y_0, z_0) tal que

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

y supongamos que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Llamemos S a la superficie que define la ecuación $g(x, y, z) = 0$ en torno a (x_0, y_0, z_0). Se define el Espacio Normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0) como el espacio vectorial generado por el gradiente de g en el punto (x_0, y_0, z_0) y se denota $N_s(x_0, y_0, z_0)$.

$$N_s(x_0, y_0, z_0) = \langle \nabla g(x_0, y_0, z_0) \rangle$$

El Espacio Tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) se denota $T_s(x_0, y_0, z_0)$ y se define como el ortogonal del espacio normal

$$T_s(x_0, y_0, z_0) = N_s(x_0, y_0, z_0)^{\perp} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / (x, y, z) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0\}$$

Observación 5.1 Los espacios tangente y normal, son espacios vectoriales, y no pasan necesariamente por el punto (x_0, y_0, z_0).

Con la definición anterior, si $\sigma : I \subseteq I\!R \to I\!R^3$ es una función tal que $\sigma(t) \in S \quad \forall t$, y $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces $\sigma'(0) \in T_s(x_0, y_0, z_0)$.
Es posible alcanzar cada $v \in T_s(x_0, y_0, z_0)$ de esta forma, con una función σ adecuada?
Supongamos que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Sea $v \in T_s(x_0, y_0, z_0)$. Elijamos $b \neq 0$ de manera tal que $b \perp \langle \{v, \nabla g(x_0, y_0, z_0)\} \rangle$; siempre existe tal b pues el espacio vectorial $\langle \{v, \nabla g(x_0, y_0, z_0)\} \rangle$ tiene dimensión 2. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= 0 \\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot b &= 0 \end{aligned}$$

el Jacobiano del sistema anterior en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\begin{pmatrix} \partial g/\partial x(x_0, y_0, z_0) & \partial g/\partial y(x_0, y_0, z_0) & \partial g/\partial z(x_0, y_0, z_0) \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Como $b \perp \nabla g(x_0, y_0, z_0)$, la matriz Jacobiana tiene rango 2, y por lo tanto siempre es posible escoger dos columnas tales que la matriz resultante sea invertible. El teorema de la función implícita nos asegura entonces que podremos siempre despejar dos variables en función de una. Supongamos sin perdida de generalidad que es posible despejar (y, z) en función de x, entonces

$$\begin{array}{rcl} g(x, y(x), z(x)) & = & 0 \\ (x - x_0, y(x) - y_0, z(x) - z_0) \cdot b & = & 0 \end{array}$$

Si se define $\sigma(t) = (t + x_0, y(t + x_0), z(t + z_0))$, entonces

$$g(\sigma(t)) = 0 \quad \wedge \quad (\sigma(t) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot b = 0$$

para todo t en una vecindad del cero. La función $\sigma(t)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ pues las funciones $y(x), z(x)$ lo son, por lo tanto, derivando las ecuaciones anteriores con respecto a t y evaluando en $t = 0$ se obtiene

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot \sigma'(0) = 0 \quad \wedge \quad \sigma'(0) \cdot b = 0$$

entonces por la elección de b no queda otra posibilidad más que $\sigma'(0) \parallel v$. Si se define $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(\|v\|t/\|\sigma'(0)\|)$ entonces $\tilde{\sigma}'(0) = v$ y $g(\tilde{\sigma}(t)) = 0$ para todo t en una vecindad del cero. De esta forma concluimos que

$$T_s(x_0, y_0, z_0) = \{\sigma'(0)/\sigma(t) \in S \quad \forall t, \quad \sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)\}$$

Teorema 5.3 (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, Caso particular)
Consideremos el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} P) & \min f(x, y, z) \\ s.a & g(x, y, z) = 0 \end{array}$$

con f, g funciones diferenciables. Si (x_0, y_0, z_0) es una solución del problema P, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Demostración Sea $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(\sigma(t)) = 0$ y $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, es decir, $\sigma(t) \in S$ para t en una vecindad del origen. Como (x_0, y_0, z_0) es un mínimo local de f restringido a S, entonces

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \sigma'(0) = 0$$

por lo hecho anteriormente, esto equivale a que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot v = 0 \quad \forall v \in T_s(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \ \nabla f(x_0, y_0, z_0) \in T_s(x_0, y_0, z_0)^{\perp} = N_s(x_0, y_0, z_0)$, y entonces por definición de $N_s(x_0, y_0, z_0)$ existe $\lambda \in I\!R$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).\Box$$

Teorema 5.4 (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, Caso general) *Consideremos el problema de optimización siguiente*

$$\begin{array}{ll} P) & \min f(x) \\ s.a. & g_i(x) = 0 \quad i = 1, ..., k \end{array}$$

donde $f, g_i : I\!R^n \to I\!R$ *son funciones diferenciables. Suponemos que* f *alcanza un mínimo local en* $x_0 \in S$, *donde* $S = \{x \in I\!R^n / g(x) = 0\}$, *y que* $Dg(x_0) \in M_{k\times n}$ *tiene rango* k. *Entonces existen* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *tales que*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

Demostración Por analogía con el caso particular definimos el Espacio Normal a S en x_0 como

$$N_s(x_0) = \langle \{\nabla g_1(x_0), ...\nabla g_k(x_0)\}\rangle$$

y el Espacio Tangente a S en x_0 como

$$T_s(x_0) = N_s(x_0)^{\perp} = \{z \in I\!R^n / z \cdot \nabla g_i(x_0) = 0 \quad i = 1, ..., k\}$$

Puesto que $Dg(x_0)$ es de rango k, el espacio $N_s(x_0)$ es un espacio vectorial con $\dim N_s(x_0) = k$, y por lo tanto $\dim T_s(x_0) = n - k$
Para demostrar el teorema, haremos uso del siguiente lema

Lema 5.1 $\forall v \in T_s(x_0)$ *existe* $\sigma : I \subseteq I\!R \to I\!R^n$, $0 \in I$ *con* $g(\sigma(t)) = 0 \, \forall t \in I$ $(\sigma(t) \in S \, \forall t \in I) \wedge \sigma(0) = x_0$ *tal que* $\sigma' = v$. *Es decir*

$$T_s(x_0) = \{\sigma'(0) / \sigma(t) \in S \, \forall t, \ \sigma(0) = x_0\}$$

Si el lema fuese cierto tendríamos que $\forall \sigma : I \subseteq I\!R \to I\!R^n$ tal que $g(\sigma(t)) = 0 \wedge \sigma(0) = x :_0$

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot \sigma'(0) = 0$$

puesto que x_0 es un mínimo local de f restringido a S. Lo anterior es equivalente, gracias al lema, a que $\nabla f(x_0) \cdot v = 0 \; \forall v \in T_s(x_0)$, o sea, $\nabla f(x_0) \in N_s(x_0)$ lo que implica que

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

para ciertos $\lambda_1, ..., \lambda_n \in I\!R$, que es lo que se quería demostrar. □

Demostración del Lema Sea $v \in T_s(x_0)$. Sea $\{b_1, ..., b_{n-k-1}\}$ una base ortonormal del espacio

$$\langle \{v, \nabla g_1(x_0), ..., \nabla g_k(x_0)\} \rangle^{\perp}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones ($n-1$ ecuaciones)

$$\begin{array}{rcl} g_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_k(x) & = & 0 \\ (x - x_0) \cdot b_1 & = & 0 \\ & \vdots & \\ (x - x_0) \cdot b_{n-k-1} & = & 0 \end{array}$$

El punto x_0 satisface las ecuaciones, y la matriz Jacobiana del sistema es

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0) \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

que es una matriz de rango $n-1$, por lo que podemos seleccionar $n-1$ columnas tales que la matriz resultante sea invertible, y gracias al teorema de la función implícita podemos despejar $n-1$ variables en función de la restante en una vecindad de x_0. Entonces existe $\sigma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to I\!R^n$ definido de manera análoga al caso particular, tal que $g(\sigma(t)) = 0 \; \forall t \in I$ y $(\sigma(t) - x_0) \cdot b_i = 0$, $\forall t,\ i = 1, ..., n-k-1$

Derivando las ecuaciones anteriores con respecto a t y evaluando en $t = 0$ se obtiene que

$$\nabla g_i(x_0) \cdot \sigma'(0) = 0, \ i = 1, ..., k \ \wedge \ \sigma'(0) \cdot b_j = 0, \ j = 1, ..., n-k-1$$

lo que implica que $\sigma'(0) \parallel v$. Definiendo $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(\|v\|t/\|\sigma'(0)\|)$ tenemos que $\tilde{\sigma}'(0) = v$, lo que nos da el lema, pues la otra inclusión $\{\sigma'(0)/\sigma(t) \in S \ \forall t, \ \sigma(0) = x_0\} \subseteq T_s(x_0)$ es directa (análoga a la demostración en el caso particular) $\square$

5.4 Algunas Reglas de Derivación Adicionales

Teorema 5.5 (Regla de Leibniz de Derivación)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$$

es diferenciable y su derivada es

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Demostración Definamos la función

$$G(z,x) = \int_0^z f(x,t)dt$$

por el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} G(z,x) = f(x,z)$$

demostremos que

$$\frac{\partial}{\partial x} G(z,x) = \int_0^z \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

para ello notemos que

$$
\begin{aligned}
& G(z,x+h)-G(z,x)-h\int_0^z \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt \\
= & \int_0^z f(x+h,t)+f(x,t)-h\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt \\
= & \int_0^z \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}f(x+yh,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t))hdydt
\end{aligned}
$$

La función $\partial f/\partial x(\cdot,\cdot)$ es continua, y por lo tanto, uniformemente continua sobre $[x-|h|,x+|h|]\times[0,z]$, asi, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $\|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|<\delta$ entonces $|\partial f/\partial x(x,y)-\partial f/\partial x(\bar{x},\bar{y})|<\varepsilon/z$. Entonces si $|h|<\delta$ se tiene que

$$
|\frac{\partial}{\partial x}f(x+yh,t)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)|<\varepsilon \ \ \forall t\in[0,z]\,\forall y\in[0,1]
$$

lo que implica que

$$
|G(z,x+h)-G(z,x)-h\int_0^z \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt|<\varepsilon|h|
$$

si $|h|<\delta$ de donde se sigue el resultado. Luego

$$
\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt = G(\beta(x),x)-G(\alpha(x),x)
$$

y aplicando el resultado anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt \\
= & \frac{\partial}{\partial z}G(\beta(x),x)\beta'(x)+\frac{\partial}{\partial x}G(\beta(x),x)\frac{dx}{dx}-\frac{\partial}{\partial z}G(\alpha(x),x)\alpha'(x)-... \\
& ...-\frac{\partial}{\partial x}G(\beta(x),x)\frac{dx}{dx} \\
= & f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x),x)\alpha'(x)+\int_0^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^{\alpha(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \\
= & f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 5.6 *Sean $A \subseteq I\!\!R^n$ y $B \subseteq I\!\!R^m$ abiertos y $f : A \times B \to I\!\!R$ de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $Q \subset B$ conjunto elemental cerrado. Entonces la función*

$$F(x) = \int_Q f(x,y)dy$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F(x) = \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)dy$$

para todo $i = 1, ..., n$

Demostración Sea $x_0 \in A$

$$\begin{aligned} & F(x_0+h) - F(x_0) - \sum_{i=1}^n h_i \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0,y)dy \\ = & \int_Q f(x_0+h,y) - f(x_0,y) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)dy \\ = & \int_Q (f(x_0+h,y) - f(x_0,y) - \nabla_x f(x_0,y) \cdot h)dy \\ = & \int_Q \int_0^1 (\nabla_x f(x_0+th,y) - \nabla_x f(x_0,y)) \cdot hdtdy \end{aligned}$$

La función $\nabla_x f(\cdot,\cdot)$ es continua en $\bar{B}(x_0,1) \times Q$ que es compacto $\Rightarrow$ es uniformemente continua. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque si $\|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\nabla_x f(x,y) - \nabla_x f(\bar{x},\bar{y})\| < \varepsilon/\mathrm{vol}(Q)$. entonces si $\|h\| < \delta$ se tiene que

$$\|\nabla_x f(x_0+th,y) - \nabla_x f(x_0,y)\| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(Q)} \quad \forall\, t \in [0,1] \;\forall\, y \in Q$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} & |F(x_0+h) - F(x_0) - \sum_{i=1}^n h_i \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)dy| \\ \leq & \int_Q \int_0^1 \|\nabla f(x_0+th,y) - \nabla f(x_0,y)\| \|h\| dtdy \\ \leq & \int_Q \int_0^1 \frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(Q)} \|h\| = \varepsilon \|h\| \end{aligned}$$

de este modo $|F(x_0+h) - F(x_0) - \sum_{i=1}^n h_i \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)dy| \leq \varepsilon \|h\|$ siempre que $\|h\| < \delta$, es decir, F es diferenciable es x_0 y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0) = \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0,y)dy$$

para todo $i = 1, ..., n$. La continuidad de las derivadas parciales queda de ejercicio. $\square$

5.5 La Fórmula de Cambio de Variables

Recordemos la fórmula de cambio de variables

$$\int_{f(\Omega)} g(x)dx = \int_\Omega g(f(y))|\det Df(y)|dy$$

Para dar sentido a la fórmula se requiere

- $f : U \to V$ biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ y con inversa de clase $\mathcal{C}^1$. (Esta clase de funciones recibe el nombre de **difeomorfismo**)
- Ω es un compacto, cuya frontera es la unión finita de grafos de funciones continuas
- $g : f(\Omega) \to I\!R$ es continua.

En estas circunstancias las funciones

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & x \notin f(\Omega) \\ g(x) & x \in f(\Omega) \end{cases}$$

y

$$(g \circ f|\det Df|)^* = \begin{cases} 0 & y \notin \Omega \\ g(f(y))|\det Df(y)| & y \in \Omega \end{cases}$$

son integrables.
Para demostrar la fórmula de cambio de variables, tenemos que dar una definición de **integrabilidad** un poco más fuerte.

Definición 5.2 *$A \subseteq I\!R^n$ se dice* v-medible *si A es compacto y su frontera es la unión finita de grafos de funciones continuas.*

Ejemplo 5.6 $A = [a, b]^n$ con a y b finitos es v-medible

Ejemplo 5.7 Si A es v-medible, y f es un difeomorfismo, entonces $f(A)$ en v-medible

Observamos que si A es v-medible, entonces podemos definir el volumen de A como

$$\text{vol}(A) = \int 1_A(x)dx$$

donde

$$1_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

Definición 5.3 *Sea A un conjunto v-medible. Una* descomposición $\mathcal{D}$ *de A es una colección de conjuntos $C_1, ..., C_k$ tales que*

- C_i *es v-medible, $i = 1, ..., k$*
- $A = C_1 \cup ... \cup C_k$
- $int(C_i \cap C_j) = \phi$*, si $i \neq j$*

Se define también el diametro *de la descomposición $\mathcal{D}$ como*

$$\text{diam}\mathcal{D} = \max_{1 \le i \le k} \text{diam}C_i$$

donde el diametro de un conjunto A v-medible es igual a $\text{diam}A = \sup\{\|x - y\|/x, y \in A\}$

Dada la descomposición $\mathcal{D}$ de A, consideremos el vector $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$ tal que $\xi_i \in C_i \; \forall i = 1, ..., k$

Definición 5.4 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la* Suma de Riemann *asociada a $(\mathcal{D}, \xi)$ como*

$$S(f, \mathcal{D}, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\text{vol}(C_i)$$

Definición 5.5 *Decimos que f es* v-integrable *sobre A, conjunto v-medible, si existe $I \in I\!R$ tal que*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \text{ tal que } \forall\mathcal{D} \text{ desc. de } A,$$

$$(\text{diam}\mathcal{D} < \delta\ \wedge \xi \text{ asociado a } \mathcal{D}) \Rightarrow |S(f,\mathcal{D},\xi) - I| < \varepsilon$$

Si tal I existe, es único, (demostrarlo) y denotamos $I = \int_A f(x)dx$

Con esta definición podemos seguir paso a paso la demostración ya hecha para probar la proposicion siguiente

Proposición 5.1 $f : A \to I\!R$ continua $\Rightarrow f$ es v-integrable

También se puede demostrar que si $f : A \to I\!R$ es acotada y continua salvo sobre el grafo de un número finito de funciones continuas, entonces f es v-integrable.

Teorema 5.7 (Teorema del Cambio de Variables)
Sea Ω v-medible y $f : U \to V$ un **difeomorfismo**, *$\Omega \subseteq U$. Sea $g : f(\Omega) \to I\!R$ v-integrable. Entonces $g \circ f : \Omega \to I\!R$ es v-integrable y*

$$\int_{f(\Omega)} g(x)dx = \int_\Omega g(f(y))|\det Df(y)|dy$$

Demostración La demostración del teorema tiene dos partes: primero el caso en que f es una función lineal, y luego el caso general.
Caso f lineal: La demostración ya fue hecha para $I\!R^3$, y se extiende de manera análoga a $I\!R^n$, por lo que supondremos cierto el resultado en el caso lineal. Asi tenemos, si T es lineal que

$$\text{vol}(T(A)) = \int_{T(A)} 1 = \int_A 1|\det T| = \text{vol}(A)|\det T| \quad \forall A \text{ v-medible}$$

Caso general: Necesitaremos dos lemas previos

Lema 5.2 *Sea U abierto, $X \subset U$ compacto y $\varphi : U \times U \to I\!R$ continua tal que $\varphi(x,x) = 1\, \forall x \in U$. Entonces $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in X\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow |\varphi(x,y) - 1| < \varepsilon$$

Demostración Puesto que X es compacto, entonces $X \times X \subset U \times U$ también es compacto, por lo que φ será uniformemente continua sobre $X \times X$. Luego, dado $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\|x-z\|+\|y-w\| = \|(x,y)-(z,w)\| < \delta \Rightarrow |\varphi(x,y)-\varphi(z,w)| < \varepsilon$, en particular, si $\|x-y\| < \delta$ entonces $\|(x,y)-(x,x)\| < \delta$ lo que implica que $|\varphi(x,y)-\varphi(x,x)| = |\varphi(x,y)-1| < \varepsilon$ $\square$

Lema 5.3 *Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $f : U \to V$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $X \subset U$ un compacto v-medible y $M = \sup\{\|Df(x)\|/x \in X\}$.(Donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial, por ejemplo $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n}\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$) Entonces*

$$\mathrm{vol}(f(X)) \leq M^n \mathrm{vol}(X)$$

Demostración Demostremos primero el caso en que X es un cubo, con centro p y lado $2a$, es decir,

$$X = [p_1 - a, p_1 + a] \times ... \times [p_n - a, p_n + a] = \prod_{i=1}^n [p_i - a, p_i + a]$$

Por la desigualdad del valor medio tenemos que $|f_i(x) - f_i(p)| \leq Ma$ y por lo tanto

$$\|f(x) - f(p)\|_\infty \leq Ma \quad \forall x \in X$$

es decir, $f(x)$ está a distancia a lo más Ma de $f(p)$ para todo $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} f(X) &\subseteq [f_1(p) - Ma, f_1(p) + Ma] \times ... \times [f_n(p) - Ma, f_n(p) + Ma] \\ &= \prod_{i=1}^n [f_i(p) - Ma, f_i(p) + Ma] \end{aligned}$$

o sea que $\mathrm{vol}(f(X)) \leq \mathrm{vol}(\prod_{i=1}^n [f_i(p) - Ma, f_i(p) + Ma]) = M^n(2a)^n = M^n \mathrm{vol}(X)$

El caso general lo hacemos por aproximación. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un abierto θ tal que $X \subset \theta \subset U$ y $\|Df(x)\| \leq M + \varepsilon$ para todo $x \in \theta$ (Por la continuidad de Df).

El conjunto X se puede cubrir por un número finito de cubos con interiores disjuntos contenidos en θ

$$X \subset \bigcup_{i=1}^k C_i$$

con $int(C_i) \cap int(C_i) = \phi$ si $i \neq j$. Además los cubos se pueden suponer tan pequeños que

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(C_i) \leq \mathrm{vol}(X) + \varepsilon$$

Luego

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f(C_i) \Rightarrow \mathrm{vol}(f(X)) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(f(C_i)) \leq \sum_{i=1}^{k} M_i^n \mathrm{vol}(C_i)$$

donde $M_i = \sup\{\|Df(x)\|/x \in C_i\} \leq M + \varepsilon$ por lo tanto $\mathrm{vol}(f(X)) \leq (M+\varepsilon)^n(\mathrm{vol}(X)+\varepsilon)$. Como esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que

$$\mathrm{vol}(f(X)) \leq M^n \mathrm{vol}(X)$$

□

Para finalizar con la demostración en el caso general, consideremos una descomposición $\mathcal{D} = \{C_1, ..., C_k\}$ de Ω y puntos $\xi_i \in C_i$ para $i : i, ..., k$. Entonces los conjuntos $f(C_i)$ definen una descomposición de $f(\Omega)$ y los puntos $f(\xi_i) \in f(C_i)$. A esta descomposición la denotamos por $\mathcal{D}f$. Usando la desigualdad del valor medio se puede demostrar que existen constantes a_1, a_2 tales que

$$a_1 \mathrm{diam}(\mathcal{D}f) \leq \mathrm{diam}(\mathcal{D}) \leq a_2 \mathrm{diam}(\mathcal{D}f)$$

gracias a que Ω es compacto. Definamos $T_i = f'(\xi_i) \in M_{n\times n}$ para $i = 1, ..., k$, y

$$N_i = \sup\{\|T_i^{-1} f'(x)\|/x \in C_i\} \quad M_i = \sup\{\|T_i(f^{-1})'(y)\|/y \in f(C_i)\}$$

con $\|\cdot\|$ la misma del lema anterior. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(f(C_i)) &= \mathrm{vol}(T_i T_i^{-1} f(C_i)) \\ &= |\det(T_i)| \mathrm{vol}(T_i^{-1} f(C_i)) \\ &\leq |\det(T_i)| N_i^n \mathrm{vol}(C_i) \end{aligned}$$

de igual manera

$$\mathrm{vol}(C_i) \leq |\det(T_i^{-1})| \mathrm{vol}(f(C_i)) M_i^n$$

De lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(C_i)|\det(T_i)| - \mathrm{vol}(f(C_i)) &\leq \mathrm{vol}(f(C_i))(M_i^n - 1) \\
\mathrm{vol}(C_i)|\det(T_i)| - \mathrm{vol}(f(C_i)) &\geq \mathrm{vol}(C_i)|\det(T_i)|(1 - N_i^n)
\end{aligned}$$

Definamos también $\varphi(x,y) = \|(f'(y))^{-1}f'(x)\|$, de este modo $\varphi(x,x) = 1$ para todo $x \in \Omega$.
Luego, gracias a los lemas anteriores, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathrm{diam}(\mathcal{D}) < \delta$ entonces

$$|N_i^n - 1| < \varepsilon \quad \wedge \quad |M_i^n - 1| < \varepsilon$$

De todo lo anterior, se concluye que existe una constante B tal que

$$|\mathrm{vol}(C_i)|\det(T_i)| - \mathrm{vol}(f(C_i))| < B\varepsilon \mathrm{vol}(f(C_i))$$

Según la definición de v-integrable debemos comparar la suma de Riemann de $h := g \circ f|\det Df|$ asociada la partición $\mathcal{D}$ y a los puntos ξ con el supuesto valor de la integral: $I = \int_{f(\Omega)} g(x)dx$

$$\begin{aligned}
& |S(h,\mathcal{D},\xi) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx| \\
= & |\sum_{i=1}^{k} g(f(\xi_i))|\det(T_i)|\mathrm{vol}(C_i) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx| \\
\leq & |\sum_{i=1}^{k} g(f(\xi_i))|\det(T_i)|\mathrm{vol}(C_i) - \sum_{i=1}^{k} g(f(\xi_i))\mathrm{vol}(f(C_i))| + .. \\
& .. + |\sum_{i=1}^{k} g(f(\xi_i))\mathrm{vol}(f(C_i)) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx| \\
\leq & B\varepsilon \sum_{i=1}^{k} |g(f(\xi_i))|\mathrm{vol}(f(C_i)) + .. \\
& .. + |\sum_{i=1}^{k} g(f(\xi_i))\mathrm{vol}(f(C_i)) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx| \\
\leq & B\varepsilon \sum_{i=1}^{k} |g(f(\xi_i))|\mathrm{vol}(f(C_i)) + |S(g,\mathcal{D}f,f(\xi)) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx|
\end{aligned}$$

En la última desigualdad, gracias a que g es v-integrable sobre $f(\Omega)$ tenemos que la sumatoria de la izquierda está acotada y el término de la derecha se puede hacer tan pequeño como se desee tomando un δ suficientemente pequeño. Por lo tanto dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que si diam$\mathcal{D} < \tilde{\delta}$, entonces

$$|S(h, \mathcal{D}, \xi) - \int_{f(\Omega)} g(x)dx| < \tilde{\varepsilon}$$

es decir, $g \circ f|\det Df|$ es v-integrable en Ω y

$$\int_{\Omega} g \circ f(y)|\det Df(y)|dy = \int_{f(\Omega)} g(x)dx$$

pues la integral es única. $\square$.

5.6 Ejercicios

1. Considere el siguiente sistema no-lineal:

$$\begin{aligned} x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + y_2^2y_1 + y_2 &= 0 \\ x_1x_2y_1 + x_2y_1y_2 + y_2y_1x_1 + y_2x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que es posible despejar (y_1, y_2) en función de (x_1, x_2) en torno a algún punto.

   (b) Encuentre los valores de :

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1,-1) \ ; \ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(1,-1)$$

2. Sea $z(x,y)$ una funcion diferenciable definida implicitamente por la ecuacion:

$$z = x \cdot f(\frac{y}{z})$$

   donde $f : I\!R \to I\!R$ es ua funcion derivable. Demuestre que

$$2(x,y) \cdot \nabla z(x,y) = z(x,y)$$

   Indicacion: Considere $F : I\!R^3 \to I\!R$ definida como $F(x,y,z) = z - x \cdot f(\frac{y}{z})$

3. Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \sin(x_1 \cdot y_1) + x_3\cos(y_2) &= 0 \\ y_2 + x_1^2 + (\sinh(x_2))^2 &= 0 \end{aligned}$$

   Encuentre los valores de $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1,0,0)$ y $\frac{\partial y_2}{\partial x_3}(1,0,0)$.
   Indicacion: Considere la función

$$\begin{aligned} g : I\!R^3 \times I\!R^2 &\to I\!R^2 \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto (u(\vec{x},\vec{y}), v(\vec{x},\vec{y})) \end{aligned}$$

   con $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2)$, $u, v : I\!R^3 \times I\!R^2 \to I\!R$ son tales que

$$u(\vec{x},\vec{y}) = \sin(x_1 \cdot y_1) + x_3\cos(y_2)$$

$$v(\vec{x},\vec{y}) = y_2 + x_1^2 + (senh(x_2))^2$$

4. (a) Mostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ podemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de manera única para u y v como funciones de x e y. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$

(b) Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + y^4}{x} &= u \\ \sin x + \cos y &= v \end{aligned}$$

Determine cerca de cuales puntos (x, y) podemos resolver x e y en términos de u y v

(c) Analizar la solubilidad del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + zu^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

para u, v, w en términos de x, y, z cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ y $w = -2$.

5. (a) Hallar $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=1}$ si

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$$

(b) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si

$$\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = a \cdot arctg(\frac{y}{x}) \quad (a \neq 0)$$

(c) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$
si

$$x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) = 1$$

(d) Las funciones y y z de la variable independiente x se dan por el sistema de ecuaciones $xyz = a$ y $x + y + z = b$; Hallar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^2z}{dx^2}$.

6. (a) Sea la funcion z dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = \phi(ax + by + cz)$$

donde ϕ es una función cualquiera diferenciable y a, b, c son constantes; demostrar que:

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

(b) La función z está definida por la siguiente ecuación

$$F(x - az, y - bz) = 0$$

donde F es una función diferenciable Encuentre a que es igual la expresión

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$$

(c) Si $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, Calcular

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

(d) Demostrar que la función z, determinada por la ecuación

$$y = x\phi(z) + \chi(z)$$

Satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial z}{\partial x})^2 = 0$$

7. Para

$$f(u, v) = (u + (log v)^2, uw, w^2)$$

(a) Muestre que f no es inyectiva

(b) Encuentre un dominio Ω de manera que la función sea inyectiva en Ω

(c) Calcule $D(f^{-1})(1,0,1)$ cuando f se considera en Ω.

8. Encuentre el mínimo de la función $f(x,y) = xy + yz$ sujeto a las restricciones $x^2y^2 = 2$ y $xy = 2$.

9. Sea $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

   (a) Demuestre que para todo $(a,b) \neq (0,0)$, f es invertible localmente en (a,b).

   (b) Demostrar que f no es inyectiva.

   (c) Calcular aproximadamente $f^{-1}(-3.01, 3.98)$. Use la fórmula de Taylor. Note que $(f(1,2) = (-3,4))$

10. Sean $f(u,v) = (u^2 + u^2v + 10v, u + v^3)$

   (a) Encuentre el conjunto de puntos en los cuales f es invertible localmente.

   (b) Compruebe que $(1,1)$ pertenece al conjunto obtenido en la parte (a), encontrar (aproximadamente) el valor de $f^{-1}(11.8, 2.2)$.

11. Sean x, y, z tres variables relacionadas por una ecuación de la forma $f(x,y,z) = 0$ donde f es una función tal que $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ son distintos de cero. Por lo tanto es posible escribir: $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$, donde estas funciones son diferenciables. Muestre que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

12. Muestre que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en torno al punto $x = 2, y = -1$ tales que $u(2,-1) = 2$ y $v(2,-1) = 1$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$

13. Calcular $\int\int_S dxdy$ donde S es el dominio limitado por

$$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$$

Indicación: Use $x = ar\cos\varphi; y = br\sin\varphi$.

14. Sea $f(x,y,z,t) = \int_{e^{x+y+z}}^{\ell(1+|x+y|)} (xt + log_z t + z)dt$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ en aquellos puntos donde existan.

15. Considere la función

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\sigma,s)d\sigma ds \end{aligned}$$

Muestre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

16. Considere la siguiente ecuación integral

$$u(x) = 5 + \int_0^x \sin(u(s) + x)ds$$

En el capítulo anterior se demostró que tiene una única solución en $C([0,1/2],I\!R)$.
Derivando dos veces la ecuación integral (justifique por que se puede derivar), encuentre la ecuación diferencial que satisface su solución

17. Considere las funciones

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(x+t,xt)dt, \quad G(x,y) = \int_0^{y^2} g(x,y,z)dz$$

Calcule $F'(x)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$

18. Encuentre una aproximación de la raíz de $\cos x - xe^x = 0$, iterando 3 veces la fórmula de Newton para $x_1 = 9$.

19. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 (es decir, un homeomorfismo con f y f^{-1} de clase C^1), que satisface que $f(B) \subset B$, donde B es la bola unitaria cerrada y $|\det f'(x)| < 1$ para todo $x \in B$. Demuestre que para toda función continua $g : B \to \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{f^k(B)} g(x)dx = 0$$

donde f^k es f compuesta consigo misma k veces.

20. Sea B_n la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Muestre que

$$Vol(B_4) = 2\int_{B_3} \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}dxdydz.$$

Tomando coordenadas esféricas muestre que el volumen de B_4 es igual a

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin(\phi)\sqrt{1 - r^2}drd\theta d\phi$$

y concluya que $Vol(B_4) = \pi^2/2$. En general muestre que el volumen de la bola de radio r es $r^4\pi^2/2$.

21. Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $a \in U$ tal que $f'(a)$ es invertible. Muestre que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}(f(B(a, r))}{\mathrm{vol}(B(a, r)} = |\det f'(a)|.$$

22. Como en el ejercicio anterior muestre que si $f'(a)$ no es invertible entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}(f(B(a, r))}{\mathrm{vol}(B(a, r)} = 0.$$