3. Problemas

3.1. Problema 1

Una forma natural de estimar el parámetro desconocido de la densidad conjunta (o función de verosimilitud) de una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de $X \sim f(x/\theta)$ es maximizando la misma, es decir, resolviendo:

$$\max_{\theta} f(x_1, \ldots, x_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)$$

Despejando θ del problema de maximización anterior se obtiene el Estimador Máximo Verosímil (EMV) de θ.

a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X con ley $f(x/\theta)$, tal que las dos primeras derivadas de $f(x/\theta)$ existen y que $f(x/\theta) > 0$. Sea $L = \ln f(x_1, \ldots, x_n/\theta)$, muestre que el problema anterior es equivalente a resolver:

$$\max_{\theta} L$$

b) Aplique el resultado anterior para encontrar el EMV $\hat{\lambda}$ de λ en el caso de una m.a.s. de una v.a. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Solución:

a) En efecto, al derivar se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln\, f(x_1, \ldots, x_n/\theta) = \frac{f'(x_1, \ldots, x_n/\theta)}{f(x_1, \ldots, x_n/\theta)} = 0 \Rightarrow f'(x_1, \ldots, x_n/\theta) = 0$$

b) Encontremos la función de verosimilitud $f(x_1, \ldots, x_n/\lambda)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n/\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

De donde, $L = \ln\, f(x_1, \ldots, x_n/\lambda) = -n\lambda + \left(\sum x_i\right) \ln\, \lambda - \ln\, \prod x_i!$

Derivando e igualando a cero:

$$-n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$$

El estimador EMV para λ es $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

3.2. Problema 2

Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a.s. tal que $X \rightsquigarrow U[0, \theta]$

a) Encuentre el E.M.V. $\hat{\theta_1}$ y el estimador de momentos $\hat{\theta_2}$ para θ.
b) Encuentre la función de distribución de $\hat{\theta_1}$ y la f.g.m. de $\hat{\theta_2}$.
c) Calcule E($\hat{\theta_1}$) y E($\hat{\theta_2}$)

Solución:

Una variable $X \rightsquigarrow U[0, \theta]$ si $f(x) = \frac{1}{\theta}$ con $0 \leq x \leq \theta$.

a) Si se trata de hacer por el método típico de calcular el logaritmo de la verosimilitud, derivar e igualar a cero, no se llega a nada. Por lo tanto, hay que tener claro el concepto del E.M.V.: aquél θ que maximiza la verosimilitud.
La verosimilitud corresponde a $f(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n}$ con $0 \leq x_i \leq \theta$ para todo i.
Como θ está en el denominador, es claro que a menor θ mayor es la verosimilitud, por lo tanto hay que buscar el menor θ posible.
Que se cumpla $0 \leq x_i \leq \theta$ para todo i es equivalente a que se cumpla $max(x_i) \leq \theta$ para todo i.
Por lo tanto, es claro que el θ mas pequeño posible (y que por lo tanto maximiza la verosimilitud) es aquel que cumple la igualdad, ésto es, nuestro E.M.V. será $\hat{\theta_1} = max(X_i)$.

El estimador de momentos se obtiene escribiendo el parámetro a estimar en función de los momentos teóricos M_i, y aproximando los momentos teóricos por los momentos empíricos correspondientes. En este caso podemos calcular

$$E(X) = \int_0^\theta x\frac{1}{\theta}dx = \frac{\theta}{2}$$

lo que implica que $\theta = 2E(X) = 2M_1$, por lo tanto si estimamos el momento de orden 1 M_1 por el momento empírico $\hat{M_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ obtenemos el estimador de momentos $\hat{\theta_2} = 2\overline{X}$.

b) Sea $Y = max(X_i)$ podemos escribir la función acumulada de Y como:
$G(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = P(X_1 \leq y)...P(X_n \leq y) = [P(X \leq y)]^n = [F(y)]^n$ Esto último porque son v.a.i.i.d.

Queremos $g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = n[F(y)]^{n-1}f(y)$ lo que, reemplazando por la forma explicita de f(y) (que es la f.d.p. uniforme) y F(y) que es la f.d. acumulada de la uniforme, se obtiene

$$g(y) = \frac{n}{\theta^n}y^{n-1}$$

para $0 \leq y \leq \theta$.

Nos piden la f.g.m. de $\hat{\theta_1}$. Como vimos en el repaso de probabilidades, si $X_1, ...X_n$ son independientes, entonces, para $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se tiene que

$$\Psi_W(t) = \prod_{i=1}^{n} \Psi_{X_i}(t)$$

Para la uniforme,

$$E(e^{tX_i}) = \int_0^\theta e^{tx_i}\frac{1}{\theta}dx_i = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta e^{tx_i}dx_i = \frac{1}{\theta t}(e^{\theta t} - 1)$$

Por lo tanto,

$$\Psi_W(t) = \prod_{i=1}^{n} \Psi_{X_i}(t) = [\frac{1}{\theta t}(e^{\theta t} - 1)]^n$$

Recordando que para $Z = aW + b$ se cumple

$$\Psi_Z(t) = e^{bt}\Psi_W(at)$$

entonces, aplicando esto para $a = \frac{2}{n}, b = 0$ se tiene que

$$Z = \hat{\theta_2} = [\frac{n}{\theta 2t}(e^{\frac{\theta 2t}{n}} - 1)]^n$$

es la f.g.m. de $\hat{\theta_2}$

c) $E(\hat{\theta_1}) = E(Y = max(X_i))$ y como conocemos la dist. de Y, entonces basta calcular

$$\int_0^\theta yg(y)dy = \frac{n\theta}{n+1}$$

Para el estimador de momentos,

$$E(\hat{\theta_2}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \theta$$

3.3. Problema 3

Sea$X_1, ..., X_n$ una m.a.s. tal que $X \rightsquigarrow U[0, \theta]$. Sea

$$\Pi(\theta|\theta_0, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta_0{}^\alpha}{\theta_0{}^{\alpha+1}} & \text{si } \theta_0 \leq \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la distribución de θ
a) Calcule la distribución a posteriori.
b) De el estimador de Bayes $\tilde{\theta}$ cuando se usa una función de pérdida cuadrática.

Solución:

a) Una variable $X \rightsquigarrow U[0,\theta]$ si $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$ con $0 \leq x \leq \theta$.
La verosimilitud corresponde a $f(x_1, ..., x_n|\theta) = \frac{1}{\theta^n}$ con $0 \leq x_i \leq \theta$ para todo i.
Que se cumpla $0 \leq x_i \leq \theta$ para todo i es equivalente a que se cumpla $max(x_1, ..., x_n) \leq \theta$ para todo i.
Además θ sigue una distribución de Pareto con parámetros θ_0 y α
Sabemos que

$$\xi(\theta|X) = \frac{f_n(x;\theta)\Pi(\theta)}{\int_\Omega f_n(x;\theta)\Pi(\theta)d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^n}\frac{\alpha{\theta_0}^\alpha}{{\theta_0}^{\alpha+1}}}{\int_\Omega \frac{1}{\theta^n}\frac{\alpha{\theta_0}^\alpha}{{\theta_0}^{\alpha+1}}d\theta}$$

La expresión anterior es válida siempre y cuando θ cumpla las dos condiciones de borde de cada función de distribución, es decir, $max(x_1, ...x_n) \leq \theta$ y $\theta_0 \leq \theta$, que es lo mismo que $max(\theta_0; x_1, ..., x_n) \leq \theta$. Por lo que los límites de integración son $max(\theta_0; x_1, ..., x_n) \leq \theta$ y ∞.

Al integrar estos límites se obtiene la distribución pedida.

b) Bajo función de pérdida cuadrática, el estimador de Bayes es el valor esperado de $\theta|X$, es decir $E(\theta|X)$. Para el cálculo, usamos la definición de esperanza:

$E(\theta|X) = \int_\Omega \theta\xi(\theta|x)d\theta$ siendo los límites de integración los ya definidos mas arriba. El resultado de la integración da:

$$\tilde{\theta} = \frac{(n+\alpha)\theta_0}{n+\alpha-1}$$

3.4. Problema 4

Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a.s. tal que $X \rightsquigarrow \beta(a, b)$. La forma de la distribución β es

$$\frac{\Gamma(a+b+1)x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}$$

con $0 \leq x \leq 1$; $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$
Además se sabe que $E(X) = \frac{a}{a+b}; Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

a) Evalúe (no calcule) la posibilidad de encontrar el estimador de máxima verosimilitud y el estimador de momentos. ¿Cual es mas fácil de llevar a cabo?¿por qué?
b) Encuentre un estimador cualquiera para a y b.

Solución:

a) Para calcular E.M.V. el procedimiento es el siguiente:

1. Calcular la función de verosimilitud $f(x_1, ..., x_n; a, b)$.

2. Calcular el logaritmo natural de la verosimilitud.

3. Derivar con respecto al parámetro a e igualar a 0; derivar con respecto al parámetro b e igualar a 0.

4. Despejar a y b de modo que queden en función de la muestra $X_1, ..., X_n$.

Para calcular el estimador de momentos el procedimiento es el siguiente:

1. Escribir los parámetros a y b en función de los momentos de orden k $M_k = E(X^k)$.

2. Aproximar los momentos de orden k por los momentos empíricos de orden k $\hat{M}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^k$

Es claro que obtener el estimador de momentos es mucho más fácil que el E.M.V. dada la compleja forma (algebraicamente hablando) de la distribución $\beta(a, b)$. Además, como nos dan la E(X) (que corresponde a M_1) y la Var(X) (que corresponde a $M_2 - {M_1}^2$), entonces basta con despejar de estas dos igualdades los parámetros a y b en función de los momentos, y aproximarlos por los momentos empíricos correspondientes.

b) Buscaremos el de momentos ya que no se nos pide ninguno en particular:

Despejando a y b de

$$M_1 = E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$M_2 - {M_1}^2 = Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

y reemplazando los momentos empíricos correspondientes, se tiene:

$$\hat{a} = \frac{\hat{M}_1(\hat{M}_1 - \hat{M}_2)}{\hat{M}_2 - {\hat{M}_1}^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{M}_1 - \hat{M}_2 + \hat{M}_1\hat{M}_2 - {\hat{M}_1}^2}{\hat{M}_2 - {\hat{M}_1}^2}$$

con

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

y

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

3.5. Problema 5

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una v.a. X con distribución de Pareto:

$$f(x/\theta) = \frac{\theta c^\theta}{x^{\theta+1}} \qquad \text{c = constante}$$

Encuentre el EMV $\hat{\theta}$ de θ.

Solución:

$$f(x_1, \ldots, x_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta) = \frac{\theta^n \cdot c^{n\theta}}{\prod x_i^{\theta+1}}$$

Aplicando logaritmo natural, derivando e igualando a 0:

$$\frac{n}{\theta} + n\ln\, c - \sum \ln\, x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{-n\ln\, c + \sum \ln\, X_i}$$

3.6. Problema 6

Sea $X_1, .., X_n$ una m.a.s. con función de densidad

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha 2^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de α

b) Encuentre el estimador de momentos de α

Respuesta:

a)

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} ln(\frac{x_i}{2^n})}$$

b)

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{x}}{\overline{x} - 2}$$

3.7. Problema 7

Sea X_1, X_2 una m.a.s. de una v.a. $X \sim Ber(p)$, y sea $T = X_1 + X_2$. Pruebe para cada caso que $E(\hat{\theta}) = \theta$, donde $\hat{\theta}$ es un estimador para θ:

a) Si $\theta = c - p$ y $\hat{\theta} = c - \frac{T}{2}$.
b) Si $\theta = (1-p)^2$ y $\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & \text{si } T = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
c) Si $\theta = (1-3p)^2$ y $\hat{\theta} = (-2)^T$.

Solución:

Notar que si X_1 y X_2 son v.a.s Bernoulli, entonces $T = X_1 + X_2$ sigue una Binomial(2,p) ($T = 0, 1, 2$).

Se tiene que $P(T = t) = \binom{2}{t} p^t (1-p)^{2-t}$.

a) $E(\hat{\theta}) = E(c - \dfrac{T}{2}) = c - \dfrac{E(T)}{2} = c - \dfrac{p+p}{2} = c - p = \theta$

b) $E(\hat{\theta}) = 1 \cdot P(T = 0) + 0 \cdot P(T = 1) + 0 \cdot P(T = 2) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 = \theta$

c) $E(\hat{\theta}) = E((-2)^T) = (-2)^0 P(T = 0) + (-2)^1 P(T = 1) + (-2)^2 P(T = 2) = (1-3p)^2$

Nótese en este caso que se tiene un mal estimador, ya que $\theta > 0$, y si $T = 1$ se tiene una estimación negativa.

3.8. Problema 8

a) Sea una población de media μ y de varianza σ^2. Sea $\hat{\mu}$ un estimador del parámetro μ. Muestre que

$$E[(\hat{\mu} - \mu)^2] = Var(\hat{\mu}) + b(\mu)^2$$

donde $b(\mu) = E(\hat{\mu} - \mu)$
b) Calcule la esperanza y la varianza del estimador de una media poblacional μ dado por

$$\hat{\mu_1} = \overline{x}$$

Deduzca $E[(\hat{\mu_1} - \mu)^2]$.
c) Calcule la esperanza y la varianza del estimador de una media poblacional μ dado por

$$\hat{\mu_1} = \frac{n\overline{x}}{\sigma^2}$$

Deduzca $E[(\hat{\mu_2} - \mu)^2]$.

Respuesta:

a) Demostrar igualdad.
b)

$$E(\hat{\mu_1}) = \mu; Var(\hat{\mu_1}) = \frac{\sigma^2}{n}; E[(\hat{\mu_1} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

c)

$$E(\hat{\mu_2}) = \frac{n\mu}{n+\sigma^2}; Var(\hat{\mu_2}) = \frac{n\sigma^2}{(n+\sigma^2)^2}; E[(\hat{\mu_1} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2(n+\mu^2\sigma^2)}{(n+\sigma^2)^2}$$

3.9. Problema 9

Una fábrica de chocolates encargó a dos empresas de estudios de mercado FRIC y FRAC que estimen el consumo promedio mensual μ de chocolate per cápita en la población chilena. La empresa FRIC obtiene los consumos mensuales de chocolate per cápita sobre una m.a.s. $X_1, ..., X_n$ de media muestral $\bar{X}$ y de varianza muestral $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$, y la empresa FRAC una m.a.s. $Y_1, ..., Y_m$ de media muestral $\bar{Y}$ y de varianza muestral $T_m^2 = \frac{1}{m}\sum(Y_i - \bar{Y})^2$.
Como las estimaciones de μ, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, dadas respectivamente por FRIC y FRAC no son iguales, la fábrica decide combinar las dos estimaciones; proponen dos estimadores:

$$\hat{\mu_1} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$$

$$\hat{\mu_2} = \frac{n\bar{X}}{m+n} + \frac{m\bar{Y}}{m+n}$$

a) Calcule la esperanza y la varianza de ambos estimadores **en función de la varianza** σ^2 en la población.
b) Sea $\hat{\mu_a} = a\bar{X} + (1-a)\bar{Y}$ en que $0 \leq a \leq 1$. Encuentre el valor de a que minimiza la varianza de $\hat{\mu_a}$.
c) La fábrica propone ahora tres estimadores para la varianza σ^2:

$$\hat{\sigma_1}^2 = \frac{S^2}{2} + \frac{T^2}{2}; \hat{\sigma_2}^2 = \frac{nS^2}{m+n} + \frac{mT^2}{m+n}; \hat{\sigma_3}^2 = \frac{nS^2 + mT^2}{m+n-2}$$

¿Para cuales se cumple que $E(\hat{\sigma_i}^2) = \sigma^2$? $i = 1, 2, 3$

Respuesta:

a)

$$E(\hat{\mu_1}) = \mu; E(\hat{\mu_2}) = \mu$$

$$Var(\hat{\mu_1}) = \frac{(n+m)\sigma^2}{4mn}; Var(\hat{\mu_2}) = \frac{\sigma^2}{n+m};$$

b) $a = \frac{n}{m+n}$
c) Solo para el tercero.

3.10. Problema 10

Sea $X_1, .., X_n$ una m.a.s. de una distribución tal que $P(X_i \in [a, b]) = \theta$. Se define

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in [a, b] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) De la distribución de Y_i. Deduzca el E.M.V. $\hat{\theta}$ de θ.
b) Sea la distribución a priori de θ: $\Pi(\theta) = 2(1 - \theta)$. De el estimador de Bayes $\tilde{\theta}$ cuando se usa una función de pérdida cuadrática.
c) De la esperanza y la varianza de los dos estimadores de θ.
d) Aplicación numérica: de las soluciones a las preguntas anteriores con los valores: $n = 10$; $X_i = 1{,}2, 3{,}5, 2{,}4, 1{,}5, 6{,}3, 2{,}8, 4{,}2, 4{,}5, 3{,}8, 5{,}1,$ y $[a, b] = [2, 4]$. Compare las esperanzas y varianzas si $\theta = 0{,}39$. Concluya.

Respuesta:

a) $Y_i \rightsquigarrow B(1, p)$. $\hat{\theta} = \bar{Y}$.
b)

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i) + 1}{n+3}$$

c)

$$E(\hat{\theta}) = \theta, Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{\theta}, E(\tilde{\theta}) = \frac{n\theta + 1}{n+3}, Var(\tilde{\theta}) = \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+3)^2}$$

d) Es cosa de reemplazar los valores correspondientes.

3.11. Problema 11

Una máquina produce un cierto componente electrónico una vez al dia. La máquina puede fallar durante el dia con probabilidad p. El operario de la máquina desea estimar esta probabilidad de falla a partir de un registro detallado de los dias transcurridos para cada mes de funcionamiento hasta la primera falla.

a) Si X_i representa el número de dias transcurridos del mes i hasta que que falla la máquina. ¿Qué distribución sigue X_i?
b) Si se toma una muestra aleatoria simple de n meses, encuentre el EMV para p.
c) Un estudio estadístico posterior del problema arrojó que la variable X seguía una distribución exponencial de parámetro p. Encuentre el EMV para p en este caso y compárelo con el obtenido en la parte anterior. Comente.

Solución:

a) Se puede ver que X_i sigue una distribución *geométrica*, ya que:

no falla dia 1 x *no falla dia 2* x ... x *no falla dia k-1* x *falla dia k*

$$= (1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots(1-p)\cdot p = (1-p)^{k-1}p$$

b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X, se tiene que:

$$f(x_1, \ldots, x_n/p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/p) = (1-p)^{\sum x_i - n} p^n$$

De donde se obtiene que el EMV de p es $\hat{p} = \bar{X}^{-1}$.

c) Si $X \sim \exp(p)$, se tiene que los estimadores coinciden en fórmula. Si bien ambas distribuciones sirvern para modelar fenómenos de falla de materiales, en el primer caso, la distribución es discreta, mientras que si X es continua, entonces es más apropiado el segundo análisis.