

PROBABILIDADES

Profe: Joaquín Fontlona

Aux: Víctor Olivero

- Temario:
- Análisis Combinatorial
 - Axiomas de probabilidades
 - Probabilidad condicional e independiente
 - Variables aleatorias o "leyes" (discreta / continuo)
 - Teoremas límite: ley de grandes números
 - * Eco. central del límite
 - Procesos Estocásticos:
 - * Cadenas de Markov
 - * Procesos de Poisson, Colas

Libro guía: Sheldon Ross,
"A First Course in Probability"

Complemento matemático: Feller

Libro para proces. estoc.: otro...

I Análisis Combinatorial

"Métodos de Conteo"

(a) "Principio Fundamental Aditivo"

Si hay n maneras de llevar a cabo una acción E_1 (o resultados de un experimento E_1) y m maneras de realizar una acción E_2 (o resultados de un experimento E_2) y los resultados posibles de E_1 y E_2 son excluyentes, entonces la acción de realizar E_1 o E_2 tiene $n+m$ resultados posibles.

Ej/ Hoy 3 líneas de buses que viajan de Stgo a Pto. Montt y 2 compañías aéreas, entonces hoy 5 formas de ir a Pto. Montt. en bus o avión.

Generalización:

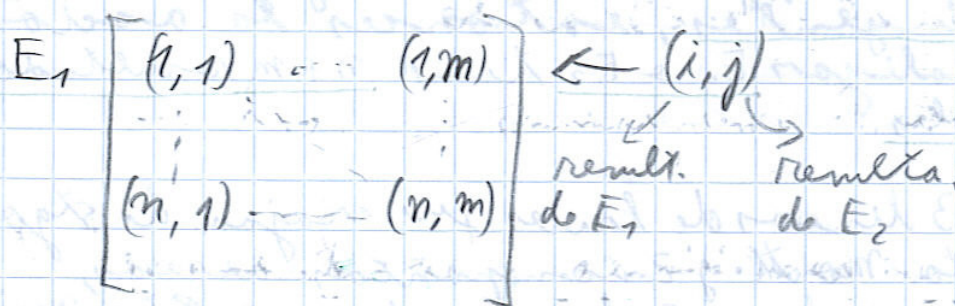
Si hay n_1 maneras de realizar E_1

3) Todos los resultados son excluyentes

entonces el experimento que consiste en realizar alguno de ellos tiene $n_1 + \dots + n_k$ resultados posibles.

(b) "Principio Fundamental Multiplicativo"

Si hay n maneras de realizar E_1 y m " " " " " " E_2 , y el resultado de E_1 no afecta los posibles resultados de E_2 , entonces el experimento de realizar E_1 primero y E_2 después tiene $n \cdot m$ resultados posibles.



Ej: Un restaurant propone un menú con 3 entradas, 2 platos de fondo a elegir, 2 postres.

\Rightarrow 12 almuerzos posibles.

Generalización: Hay n_1 maneras de realizar E_1 ,

\vdots
 n_k " " " " " " E_k

Y el resultado de \mathcal{E}_n no afecta los posibles resultados de los demás, entonces el experimento de realizar $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_K$ tiene $n_1 \cdot \dots \cdot n_K$ resultados posibles.

Ej: (i) ¿Cuántos patentes hay, si tienen 4 letras seguidas de 2 números?

$$R: 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$$

(ii) ¿Y si no queremos letras repetidas?

$$R: 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10$$

¿Por qué? Por principio aditivo

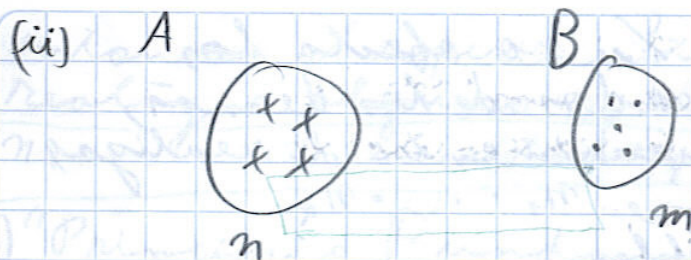
Si \mathcal{E}_1 tiene K resultados posibles y para el resultado i , \mathcal{E}_2 tiene n_i resultados posibles, entonces " \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 " tiene $n_1 + n_2 + \dots + n_K$ resultados posibles.

Si $n_1 = \dots = n_K = n \Rightarrow n \cdot m$ resultados posibles.

Ej: (i) ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

$$R: 2^n$$

n acciones: incluir o no cada elemento $\left. \begin{array}{l} \text{en el subconjunto que consideramos} \end{array} \right\} 2 \text{ opciones}$
 $\Rightarrow 2^n$ resultados posibles



¿Cuántas funciones hay de A en B?

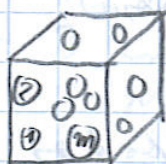
R: $m \cdot m \cdot \dots \cdot m$

n veces

cuántos elementos de B pueden asociar al "primer elemento de A"

↓ Cuántos "segundo elemento de A"

"Tipos Fundamentales de muestreo"



m bolitas en una caja,
compartimentos n

(a) Muestreo con reposición y orden

sacamos n veces una bolita devolviéndola
 vez, y registrando su número,
 teniendo en cuenta el orden de
 aparición.

Ej: $m = 5$ $n = 3$

②	②	③	} resultados distintos
④	③	①	
④	②	⑤	
①	③	④	
①	③	①	

Resultados posibles: m^n

Notar: visualizar la conexión con las funciones $f: A \rightarrow B$

Notar que el resultado corresponde al número de n -tuplas

(a_1, \dots, a_n) con $a_i \in \{1, \dots, m\}$

(b) "Muestreo sin reposición con orden"

Así como n bolitas, sin devolverlos, registrando el número y el orden en que aparecieron.

Ojo: se debe tener $n \leq m$

$$R: m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m - (n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Notación: Arreglos de m objetos tomados de a n .

Caso particular: $m=n$
Se obtiene $n!$, y corresponde al número de permutaciones.

Ej (i) Hay 10 candidatos para un trabajo, 4 mujeres y 6 hombres.

El comité de selección revisa por separado hombres y mujeres. ¿Cuántos resultados posibles hay?

$$4! \cdot 6!$$

(ii) Un mechón tiene 4 libros de Matemáticas
3 " " Física
2 " " Computación
1 " " Química

¿De cuántas formas los puede ordenar de manera que libros de la misma materia estén juntos?

R: $(4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!) \cdot 4!$

28/7

formas de ordenar los temas
↓
formas de ordenar los temas

(c) Muestras sin reposición y sin orden.

Rasamos n bolitas registrando su número, pero no el orden de aparición.

Es decir, es lo mismo que rasar las n de una vez.

Ojo: $n \leq m$

Lo que queremos contar son los subconjuntos $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ de n elementos.

Sea X el número buscado. Sabemos que $n!$ es el número de formas de ordenar n bolitas.

$$\text{Luego, } X \cdot n! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

→ # de formas de rasar n bolitas teniendo en cuenta el orden.

$$\Rightarrow X = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

notación $\frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n} = C_n^m$

se llama el "número de combinaciones de n objetos tomados de entre m ."

Ej. Se quiere formar un comité de 2 hombres y 3 mujeres, escogiéndolos entre 5 hombres y 7 mujeres.

(a) ¿Cuántos comités se pueden hacer?

$$R: \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3}$$

(b) Si dos de las mujeres no quieren estar simultáneamente en el comité.
¿Cuántos comités se pueden hacer?

2 formas:

- Contando casos prohibidos:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$$

↖ se debe escoger 1 ≠ de los 2 que no quieren

$$\therefore R: \binom{5}{2} \left(\binom{7}{3} - \binom{5}{1} \right) = 300$$

- Contando los casos posibles:

$$\text{Comités posibles: } \underbrace{\binom{5}{2} \binom{5}{3}}_{\text{comités sin los 2}} + \underbrace{\binom{5}{2} \binom{5}{2}}_{\text{comités sin una}} + \underbrace{\binom{5}{2} \binom{5}{2}}_{\text{comités sin la otra}} = 300$$

comités
sin los 2

comités
sin una

comités
sin la otra

Ej/ Si lanzo 5 dados simultáneamente, de cuántas formas se puede obtener un "bull" (= 3 dados de una "pinta")
 2 " " " otra " "

1^{ra} ¿De cuántas maneras se arrojan 2 pintas (diferentes)?

$$\binom{6}{2}$$

Ej: 

2^{da} ¿De cuál pinta salen 2 y de cuál 3?


2 formas

Ej: 3  , 2 

3^{ra} ¿Entre los 5, cuáles son aces y cuáles tríos?



$$\binom{5}{2}$$

(arrojo cuáles dados fueron s)

$$R: \underbrace{\binom{6}{2} \cdot 2}_{6 \cdot 5} \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{\frac{5 \cdot 4}{2}} = 300$$

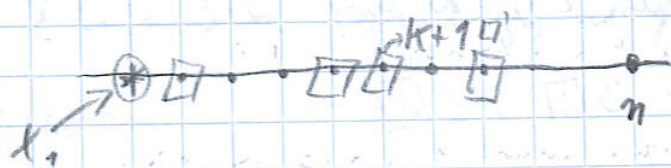
Ej/ P.D.Q. $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

total de subconjuntos de tamaño o cardinal n

de subconj. de k elementos.

q.e.d.

Ej/ Probar $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$



Hay dos tipos de subconjuntos de $k+1$ elementos:

- los que incluyen a x_1 : $\binom{n}{k}$
- los que no: $\binom{n}{k+1}$

$$\begin{aligned} \therefore \binom{n+1}{k+1} &= \# \text{ incluyen } x_1 + \# \text{ no incluyen } x_1 \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

Ej/ En el "bridge" se reparten 52 cartas entre 4 jugadores

(a) ¿Cuántas manos puede recibir un jugador, que contenga 1 as y solo 1?

$$4 \cdot \binom{48}{12}$$

ases → formas de escoger las 12 cartas ≠ ases.

(b) ¿y que contenga al menos 1 as?

1^{ra} forma: manos sin ningún as?

$$\binom{48}{13}$$

∴ manos que contienen al menos 1 as:

$$\binom{52}{13} - \binom{48}{13}$$

2^{da} forma: $4 \binom{48}{12}$ 1 solo as

$$\binom{4}{2} \binom{48}{11}$$

formas de escoger los 2 ases

$$\binom{4}{3} \binom{48}{10} \text{ 3 ases solamente; } \binom{4}{4} \binom{48}{9} \text{ 4 ases solamente}$$

$$R: 4 \binom{48}{12} + \binom{4}{2} \binom{48}{11} + \binom{4}{3} \binom{48}{10} + \binom{4}{4} \binom{48}{9}$$

Ej/ P.D.Q. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$\underbrace{(x+y)^{\overset{\nearrow 1}{1}} (x+y)^{\overset{\nearrow 2}{2}} \cdots (x+y)^{\overset{\nearrow n}{n}}}_{n \text{ veces}}$$

es una suma de términos de la forma $x^k y^{n-k}$

Se escoge un z_1 sumando $(x+y)_1$ (es decir x o y)
y lo multiplico por un z_2 (sumando de $(x+y)_k$)
el resultado $z_1 z_2$ lo multiplico por un z_3 (sumando...

⋮

$z_1 \cdots z_n$

Cada $z_1 \cdots z_n$ es de la forma $x^k y^{n-k}$ para cierto $k \in \{1, \dots, n\}$

La cantidad de maneras de escoger k de los z_i 's siendo x para cada k , es $\binom{n}{k}$ $\therefore x^k y^{n-k}$ "aparecerá"

$\binom{n}{k}$ veces. Como los términos $x^k y^{n-k}$ son distintos de los $x^{k'} y^{n-k'}$, por prop. aditiva

se concluye la fórmula.

(d) Muestras sin reposición y con orden
de objetos distinguibles por grupos

m bolitas agrupadas en:

n_1 de color C_1 Con $n_1 + \dots + n_r = m$
 n_2 de color C_2 y $r \leq m$
 \vdots \vdots
 n_r // C_r

Si sacamos todas las bolitas 1 por 1,
sin devolverlos y anotamos el color
obtenido, en el orden en que aparecieron

Ej/ Resultados posibles

$n_1 = 2$	verdes	(1) (2)	(1) (1) (3) (2) (2) (1)	2 formas de obtener la misma
$n_2 = 3$	rojas	(1) (2) (3)	(1) (3) (1) (2) (2) (1)	
$n_3 = 1$	azules	(1)	(2) (1) (2) (1) (3) (1)	

Ej/ En una carrera compiten
 10 brasileños
 8 argentinos
 4 peruanos
 1 chileno

¿Cuántos resultados posibles tiene la carrera?

Resultado posible:

- 1 Chile
- 2 Brasil
- 3 Brasil
- 4 Perú
- 5 Argentina
- \vdots
- \vdots
- \vdots