UChile	**Probabilidades y Estadística**	**Felipe Celery**
FCFM	**MA3403-4**	**Víctor Riquelme**
DIM	**Prim'09**	

Clase Auxiliar 6
Vectores Aleatorios y Densidad Conjunta

Problema 1 *Se lanza un dado equilibrado hasta que se obtiene un 6. Sean X e Y respectivamente el lanzamiento en que se obtuvo el 6 y el numero de $5's$ que salieron antes del primer 6 respectivamente. Calcule la ley conjunta de (X, Y) y la esperanza de Y.*

Sol. Notemos que las variables X e Y son discretas. Entonces para calcular la ley conjunta calcularemos $\mathbb{P}(X = m, Y = n)$.

Vemos que si $n \geq m$, esto quiere decir que hay al menos el mismo número de cincos que la posición en la que aparece el primer seis. En este caso, la probabilidad es cero.

Ahora, si $m > n$, estamos pidiendo que el primer seis salga en la posicion m (la probabilidad de que en la posición m salga un 6 es $\frac{1}{6}$), y entre los $m - 1$ lugares que están antes que el primer seis distribuir n cincos (cada uno con probabilidad $\frac{1}{6}$), y el resto de los $(m-1) - n$ espacios rellenarlos con otros números (que no sean ni 5 ni 6, cada caso tiene probabilidad $\frac{4}{6}$). Entonces:

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) = \left(\frac{1}{6}\right)\binom{m-1}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{(m-1)-n}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m, n)$$

Esta es la ley del par (X, Y) Ahora, para encontrar la esperanza de Y se pueden tomar dos caminos:

(i) Encontrar la ley marginal de Y (calculando $\mathbb{P}(Y = n) = \sum \mathbb{P}(X = m, Y = n)$, donde la suma es sobre todos los posibles valores de X), y luego calculando la esperanza de Y por definición ($\mathbb{E}(Y) = \sum n\mathbb{P}(Y = n)$, donde la suma es sobre todos los posibles valores de Y). Esta queda de ejercicio.

(ii) Por la regla de probabilidades totales aplicada a la esperanza se puede calcular $\mathbb{E}(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y|X = m)\mathbb{P}(X = m)$. Esta es la forma que seguiremos acá.

Primero, calculamos la ley marginal de X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\binom{m-1}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{(m-1)-n}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m, n) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{1}{6}\right)\binom{m-1}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{(m-1)-n} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{m-1}\binom{m-1}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{(m-1)-n} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\right)^{m-1} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Entonces, $X \sim Geom(1/6)$. Ahora, tratamos de entender que significa la esperanza de Y condicional a $X = m$. Pensémoslo asi: dado que el primer seis se obtiene en la posición n, ¿cuál es el número esperado de cincos que aparecen entre esos $m-1$ espacios? [intuitivamente, el número de cincos antes de que el primer seis salga en la posicion m debiera seguir una distribucion binomial].

Entonces, calculemos la ley de Y condicional a que $X = m$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y = n | X = m\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(Y = n, X = m\right)}{\mathbb{P}\left(X = m\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{6}\binom{m-1}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{(m-1)-n}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n)}{\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6}} \\
&= \binom{m-1}{n}\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{4}{6}\right)^{m-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{-n}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n) \\
&= \binom{m-1}{n}\frac{\left(\frac{1}{6^n}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^{m-1}\left(\frac{6^n}{4^n}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n) \\
&= \binom{m-1}{n}\frac{1}{4^n}\left(\frac{4}{5}\right)^{m-1}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n) \\
&= \binom{m-1}{n}\frac{5^n}{4^n}\left(\frac{4}{5}\right)^{m-1}\frac{1}{5^n}\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n) \\
&= \binom{m-1}{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{(m-1)-n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\mathbb{1}_{\{m>n\}}(m,n)
\end{aligned}$$

Entonces, la ley de Y condicional a que $X = m$ es $Binom(m-1, 1/5)$. Esto lo denotamos por $Y|X = m \sim Binom(m-1, 1/5)$. En este caso, la esperanza de Y condicional a que $X = m$ es igual a la esperanza de una Binomial(m-1,1/5), esto es $1/5(m-1)$:

$$\mathbb{E}\left(Y|X = m\right) = \frac{1}{5}(m-1)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y|X=m)\,\mathbb{P}(X=m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{5}(m-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\mathbb{E}(Geom(1/6)) - \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(Geom(1/6)) = m\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1/6} - 1\right] \\
&= \frac{1}{5}[6-1] \\
&= 1
\end{aligned}$$

En conclusión, en esperanza sale sólo un cinco antes que el primer seis salga.

Problema 2 *La cisterna de una estación gasolinera es llenada cada lunes en la mañana. La venta semanal, en miles de litros, es una variable aleatoria de densidad:*

$$f(x) = 5(1-x)^4\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

¿Cuál debe ser la capacidad mínima de la cisterna para que en promedio, la gasolinera se quede corta a lo más una de cada cien semanas?

Sol. Denotemos por C la capacidad de la cisterna, y X la varaiable aleatoria que representa la cantidad de gasolina que es demamdada semanalmente. Entonces la densidad de probabilidad de X viene dada por f.

¿Qué significa que la gasolinera se quede corta? Significa que la cantidad demandada de gasolina sobrepase la capacidad de la cisterna, o en otras palabras, que $X > C$

¿Qué significa que en promedio, la gasolinera se quede corta a lo más una de cada cien semanas? Significa que la probabilidad de que la gasolinera quede corta sea de $\frac{1}{100}$.

Juntando lo anterior, nos piden encontrar C tal que

$$\mathbb{P}(X > C) = \frac{1}{100}$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > C) &= \int_C^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_C^{\infty} 5(1-x)^4 \mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx \\
&= \int_C^{1} 5(1-x)^4 dx \mathbb{1}_{(0,1)}(C) \\
&= -5\int_{1-C}^{0} y^4 dy \mathbb{1}_{(0,1)}(C) \\
&= 5\int_{0}^{1-C} y^4 dy \mathbb{1}_{(0,1)}(C) \\
&= 5\frac{(1-C)^5}{5}\mathbb{1}_{(0,1)}(C) \\
&= (1-C)^5 \mathbb{1}_{(0,1)}(C)
\end{aligned}
$$

Ahora imponemos la igualdad de probabilidades, suponiendo que $C \in (0,1)$:

$$
\begin{aligned}
(1-C)^5 &= 0.01 \\
1-C &= \sqrt[5]{0.01} \\
C &= 1-\sqrt[5]{0.01} \\
&= 1-0.3981071706 \\
&= 0.6018928294
\end{aligned}
$$

Entonces, se necesitaría una cisterna de 0.602 miles de litros, o sea, 602 litros.

Problema 3 *Sean $e_1, \mathbb{e}_2$ dos variables aleatorias independientes con ley exponencial de parámetro λ. Encuentre las leyes de $Z = \frac{\mathbb{e}_1}{\mathbb{e}_1+\mathbb{e}_2}$ y $W = \mathbb{e}_1 + \mathbb{e}_2$. Encuentre la varianza de $Z - W$.*

Sol. En este problema ocuparemos la fórmula de cambio de variable para las densidades de vectores aleatorios. Para ello,consideremos los vectores aleatorios $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)$, con densidad conjunta

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2}(\eta_1,\eta_2) &= f_{\mathbb{e}_1}(\eta_1) f_{\mathbb{e}_2}(\eta_2) && \text{(indep. de } \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\text{)} \\
&= \lambda e^{-\lambda\eta_1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\eta_1)\lambda e^{-\lambda\eta_2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\eta_2) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda(\eta_1+\eta_2)}\mathbb{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(\eta_1,\eta_2)
\end{aligned}
$$

y $(Z,W) = \left(\frac{\mathbb{e}_1}{\mathbb{e}_1+\mathbb{e}_2}, \mathbb{e}_1+\mathbb{e}_2\right)$.
Notemos que se puede escribir $(Z,W) = r(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)$, donde

$$
r(\eta_1,\eta_2) = \left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}, \eta_1+\eta_2\right) = (z,w)
$$

¿Cuales son los posibles valores que toma el vector (Z,W)? Notemos que Z puede tomar valores sólo entre 0 y 1, y W toma valores entre 0 y infinito (esto por los valores que pueden tomar $\mathbb{e}_1$ y $\mathbb{e}_2$: $(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2) \in (0,\infty)\times(0,\infty) = A$). Así, $(Z,W) \in (0,1)\times(0,\infty) = B$

Hay que demostrar que $r : A \to B$ es invertible (probarlo), y encontrar la inversa $s = r^{-1}$. Es facil ver que $s(z, w) = (zw, w - zw) = (zw, w(1 - z)) = (\eta_1, \eta_2)$, con $z \in (0, 1)$ y $w \in (0, \infty)$.
Dado todo lo anterior, la densidad del vector (Z, W) esta dada por

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2}(\eta_1(z, w), \eta_2(z, w))|J_s(z, w)|\mathbb{1}_B(z, w)$$

con $|J_s(z, w)|$ el determinante del jacobiano de la inversa de r. Hagamos el calculo:

$$\begin{aligned}
J_s(z,w) &= [\partial_z s(z,w) \mid \partial_w s(z,w)] \\
&= \begin{bmatrix} \partial_z s_1(z,w) & \partial_w s_1(z,w) \\ \partial_z s_2(z,w) & \partial_w s_2(z,w) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_z zw & \partial_w zw \\ \partial_z w - zw & \partial_w w - zw \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w & z \\ -w & 1-z \end{bmatrix} \\
|J_s(z,w)| &= \begin{vmatrix} w & z \\ -w & 1-z \end{vmatrix} \\
&= w(1-z) - (-wz) \\
&= w - wz + wz \\
&= w
\end{aligned}$$

Vemos que $J_s(z, w)$ es invertible si $w \neq 0$ (o sea, siempre donde nos interesa, pues $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 | w = 0\} \cap B = \phi$). Se cumplen todas las hipotesis del teorema del cambio de variable, asi que la densidad conjunta de (Z, W) es:

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z,w) &= f_{\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2}(\eta_1(z,w), \eta_2(z,w))|J_s(z,w)|\mathbb{1}_B(z,w) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda(\eta_1(z,w)+\eta_2(z,w))} w \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,\infty)}(z,w) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda((zw)+(w-zw))} w \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,\infty)}(z,w) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,\infty)}(z,w)
\end{aligned}$$

Ahora, para obtener las leyes de Z y W hay que integrar con respecto a la “otra” variable (la que se quiere hacer desaparecer). Estas son las leyes marginales.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Z,W}(z,w)dw \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,\infty)}(z,w)dw \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,1)}(z)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)dw \\
&= \lambda \int_0^{\infty} w\lambda e^{-\lambda w} dw \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \\
&= \lambda \mathbb{E}\left(Exp(\lambda)\right) \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \\
&= \lambda \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \\
&= 1\mathbb{1}_{(0,1)}(z)
\end{aligned}$$

Entonces la ley marginal de Z es $Unif(0,1)$

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Z,W}(z,w)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,\infty)}(z,w)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,1)}(z)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)dz \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda w} w \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0,1)}(z)dz \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda w} w \int_0^1 dz \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda w} w \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)
\end{aligned}$$

Entonces la ley marginal de W es $Gamma(2,\lambda)$

Ahora, para calcular la varianza de $Z-W$:

$$\mathbb{V}ar(Z-W) = \mathbb{V}ar(Z) + \mathbb{V}ar(W) - 2\mathbb{C}ov(Z,W)$$

Notemos que $f_Z(z)f_W(w) = f_{Z,W}(z,w)$, de donde obtenemos que Z y W son independientes y, por lo tanto, $\mathbb{C}ov(Z,W) = 0$ Así,

$$\mathbb{V}ar(Z-W) = \mathbb{V}ar(Z) + \mathbb{V}ar(W)$$

Queda de ejercicio calcular la varianza de una variable aleatoria uniforme y de una gamma (esta aparece en la tarea).