Clase Auxiliar #11 Probabilidades y Estadística Prim '08

*) Test de Hipótesis Paramétricos

*) Test de Hipótesis No Paramétricos.

Problema 1 Sea $(X_1 \ldots X_n)$ VAS de una población $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocido

Proponga un test de hipótesis para contrastar las hipótesis

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{v/s} \quad H_1: \mu > \mu_0$$ con nivel de significación α

Sol Usamos el test de razón de verosimilitud: la densidad conjunta es

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Llamemos $\Theta_0 = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu \leq \mu_0\}$, $\Theta_1 = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu > \mu_0\} = \Theta_0^c$

Entonces, la razón de verosimilitud es

$$r(\vec{x}) = \frac{\sup_{\mu \in \Theta_1} f_{\vec{X}}(\vec{x}|\mu)}{\sup_{\mu \in \Theta_0} f_{\vec{X}}(\vec{x}|\mu)}$$

El criterio para rechazar H_0 es que $\vec{x}$ pertenezca a la región de rechazo (o r. crítica), que denotamos R^*. Esta región es de la forma

$$R^* = \{\vec{x} \in \mathbb{X} \mid r(\vec{x}) \geq k\}$$

donde k viene dado por la cota para el error tipo 1:

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} P(R^*|\mu) = \alpha$$

nuestro caso,

$$r(\vec{x}) = \frac{\sup_{\mu>\mu_0} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}{\sup_{\mu\leq\mu_0} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \geq k$$

Esto es equivalente a (en el numerador y denominador) tomar supremo donde corresponda de

$$f(\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

O sea, a tomar ínfimo de $g(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

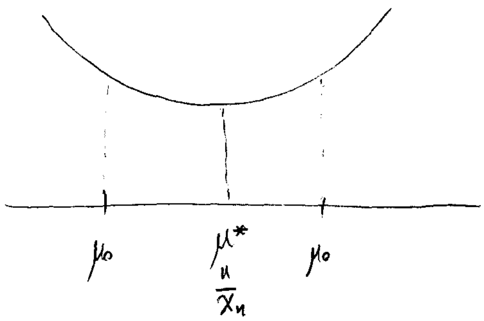
El mínimo global de g es (vía derivar e igualar a 0)

$$\partial_\mu g(\mu) = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\boxed{\mu^* = \overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Entonces, se pueden tener dos casos: $\mu_0 > \overline{x}_n$ o $\mu_0 \leq \overline{x}_n$.



Si $\mu_0 > \overline{x}_n$,

$\sup_{\mu>\mu_0} () =$ evaluar la $f_{\vec{x}}$ en μ_0

$\sup_{\mu\leq\mu_0} () =$ evaluar la $f_{\vec{x}}$ en $\overline{x}_n$

Si $\mu_0 \leq \overline{x}_n$,

$\sup_{\mu>\mu_0} () =$ evaluar la $f_{\vec{x}}$ en $\overline{x}_n$

$\sup_{\mu\leq\mu_0} () =$ evaluar la $f_{\vec{x}}$ en μ_0

Entonces, $r(\vec{x}) = \mathbb{1}_{\{\mu_0 > \bar{x}_n\}} \dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2}} + \mathbb{1}_{\{\mu_0 \le \bar{x}_n\}} \dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}}$

$$= \mathbb{1}_{\{\mu_0 > \bar{x}_n\}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left[(x_i-\mu_0)^2 - (x_i-\bar{x}_n)^2\right]} + \mathbb{1}_{\{\mu_0 \le \bar{x}_n\}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left[(x_i-\bar{x}_n)^2 - (x_i-\mu_0)^2\right]}$$

Haciendo cálculos, $\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 - (x_i-\bar{x}_n)^2 = \sum_{i=1}^n \cancel{x_i^2} + \mu_0^2 - 2x_i\mu_0 - \cancel{x_i^2} - \bar{x}_n^2 + 2x_i\bar{x}_n$

$$= n\mu_0^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x}_n^2 + 2\bar{x}_n \sum_{i=1}^n x_i$$

$$= n(\bar{x}_n - \mu_0)^2$$

Reescribimos $r(\vec{x}) = \mathbb{1}_{\{\mu_0 > \bar{x}_n\}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} n(\bar{x}_n-\mu_0)^2} + \mathbb{1}_{\{\mu_0 \le \bar{x}_n\}} e^{\frac{1}{2\sigma^2} n(\bar{x}_n-\mu_0)^2}$

y notando que $r(\vec{x})$ es función monótona de $\bar{x}_n$ (es función creciente de $\bar{x}_n$),

$$r(\vec{x}) \geq k \iff \bar{x}_n \geq k'$$

y la región de rechazo se escribe como

$$R^* = \{\vec{x} \in \mathcal{X} \,/\, \bar{x}_n \geq k'\}$$

¿Cómo encontramos k'? Imponiendo que $\sup_{\mu \in \Theta_0} \mathbb{P}(R^*/\mu) = \alpha$

$$\sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu(\bar{X}_n \geq k') = \sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k'-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad ; \quad \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0$$

$$= \sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(Z \geq \frac{k'-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Como la probabilidad anterior es creciente en función de μ, tomamos el μ más grande posible, que es $\mu = \mu_0$

entonces $\sup_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}(R^* | \mu) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{k' - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha$ → imposición.

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{k' - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es encontrable en tablas estadísticas.

$$\Rightarrow \boxed{k' = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

El criterio de rechazo es, entonces, rechazar $H_0 : \mu \leq \mu_0$

$$\boxed{\overline{X}_n \geq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Problema 2 En una aseguradora el # de partes recibidos por siniestros en un día sigue una distribución de Poisson. Se desea contrastar las hipótesis

$$H_0: \lambda = 2 \qquad vs \qquad H_1: \lambda = 1$$

Analizar, utilizando el Lema de Neyman-Pearson, si existe la mejor región crítica con nivel de significación del 3%. Los datos son $n = 100$ días, $\overline{x}_n = 1.3$.

sol Nuevamente utilizamos la razón de verosimilitud (para hipótesis simples)

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}/\lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\Sigma x_i}}{\prod_{i=1}^{n} (x_i!)}$$

$$\Rightarrow r(\vec{x}) = \frac{f_{\vec{X}}(\vec{x}/\lambda_1)}{f_{\vec{X}}(\vec{x}/\lambda_0)} = \frac{e^{-n\lambda_1} \frac{\lambda_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod x_i!}}{e^{-n\lambda_0} \frac{\lambda_0^{\Sigma x_i}}{\prod x_i!}} = e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x}$$

La región de rechazo es de la forma

$$R^* = \{ \vec{x} \in \mathcal{X} \,/\, r(\vec{x}) \geq k \}$$

en nuestro caso, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_0 = 2$

$$r(\vec{x}) = e^{-n(1-2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq k$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\Sigma x_i} \geq k' \qquad / \ln()$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1/2) \geq \ln(k'') \qquad \text{con } \ln(1/2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \tilde{k}}$$

La constante $\tilde{k}$ la encontramos al imponer la condición

$$\mathbb{P}(R^* / H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \tilde{k} \;/\; \lambda = 2 \right)$$

y recordamos que la suma de v.a. Poisson ind. se distribuye Poisson, con parámetro $\sum \lambda_i$

$$0{,}03 = \mathbb{P}(Y \leq \tilde{k})$$

con $Y \sim \text{Poisson}(n\lambda_0)$, $\alpha = 0{,}03$

$$\boxed{0{,}03 = \sum_{i=0}^{\tilde{k}} e^{-200} \frac{200^i}{i!}}$$

$n\lambda_0 = 200$

$\sum X_i = n \overline{X}_n = 130$

De lo anterior se obtiene $\tilde{k} = 173{,}5$ $\quad (F(173) = 0{,}026 \,,\, F(174) = 0{,}033)$

y el criterio de rechazo es $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 173{,}5$.

En nuestro caso, con un 3% de error tipo I rechazamos la hipótesis H_0

(pues $\sum X_i = 130 \leq 173{,}5$.)

Problema 3 Suponga que la distribución de alturas de los hombres de cierta ciudad sigue una distribución Normal $(68\,(\mathrm{in}), 1(\mathrm{in})^2)$. Suponga también que las alturas de los hombres de cierto barrio de la ciudad son medidas, obteniendo las siguientes frecuencias:

Altura (in)	<66	$(66, 67.5)$	$(67.5, 68.5)$	$(68.5, 70)$	>70
Frecuencia	18	177	198	102	5

Testee la hipótesis de que estos hombres sean una muestra representativa de los hombres de la ciudad

Sol Si fueran representativos de los hombres de la ciudad, su distribución (teórica) debería ser Normal $(68, 1)$. Entonces, el contraste es (X = altura hombres del barrio)

$$H_0: X \sim N(68,1) \quad v/s \quad H_1: X \not\sim N(68,1)$$

Usamos el test de bondad de ajuste, para lo cual categorizamos la distribución continua teórica de acuerdo a los intervalos del muestreo:

$$I_1 = (-\infty, 66);\ I_2 = (66, 67.5),\ I_3 = (67.5, 68.5),\ I_4 = (68.5, 70),\ I_5 = (70, \infty)$$

Entonces, la hipótesis (categorizada) sería

$$H_0: p_i = p_i^\circ\ (\forall i) \quad v/s \quad H_1: p_i \neq p_i^\circ \text{ algún } i$$

con $p_i^\circ = \mathbb{P}\left(N(68,1) \in I_i\right) = \mathbb{P}\left(N(0,1) \in I_i - 68\right)$

$$p_1^\circ = \mathbb{P}(N(0,1) \leq -2) = 0,0227$$
$$p_2^\circ = \mathbb{P}(-2 \leq N(0,1) \leq -0,5) = 0,2858$$
$$p_3^\circ = \mathbb{P}(-0,5 \leq N(0,1) \leq 0,5) = 0,383$$
$$p_4^\circ = \mathbb{P}(0,5 \leq N(0,1) \leq 2) = 0,2858$$
$$p_5^\circ = \mathbb{P}(2 \leq N(0,1)) = 0,0227$$

...os 5 categorías, por lo que el estadístico Q tiene distribución

$$Q = \sum_{i=1}^{5} \frac{(N_i - N p_i^{\circ})^2}{N p_i^{\circ}} \overset{(a)}{\sim} \chi_4^2$$

...valuando, $Q = 27{,}51$

...amos en la tabla de distribución de χ_4^2,

$$\mathbb{P}\left(\chi_4^2 \geq 9{,}488\right) = 0{,}05$$

Por lo que el p-valor $= \mathbb{P}\left(\chi_4^2 \geq 27{,}51\right)$ es cercano a 0

Rechazamos la hipótesis

Problema 4 Se lanza un dado de 6 caras, obteniendo la siguiente tabla de frecuencias:

#	1	2	3	4	5	6
frec	21	17	21	7	8	25

Usted sospecha que el dado está desequilibrado. Realice el test de hipótesis de para

$$H_0: p_i = \frac{1}{6} \quad \forall i \quad v/s \quad H_1: p_i \neq \frac{1}{6} \quad \text{algún } i.$$

sol El test a usar es el test de bondad de ajuste.

$$Q = \sum_{i=1}^{q} \frac{(N_i - Np_i^{\circ})^2}{Np_i^{\circ}} \overset{(a)}{\sim} \chi^2_{6-1}$$

, $q = \#$ categ., $N = \sum_{i=1}^{q} N_i$

Hacemos la tabla

i	N_i	Np_i	$(N_i - Np_i)^2$	$(N_i-Np_i)^2/Np_i$	Q
1	21	16,6	18,8	1,13	21,63
2	17	16,6	0,1	6,02	
3	21	16,6	18,8	1,13	
4	7	16,6	93,4	5,63	
5	8	16,6	56,8	3,54	
6	25	16,6	69,4	4,18	

Ahora, $\mathbb{P}(\chi^2_5 \geq 11,07) = 0,05$

entonces $p\text{-valor} = \mathbb{P}(\chi^2_5 \geq 21,63) < 0,05$

y por el criterio del p-valor, se rechaza H_0, o sea, se rechaza que el dado sea justo.