Clase Auxiliar #9 Probabilidades y Estadística Prim'09 F.C, V.R.

Problema 1: continuación problema 1 Auxiliar 8, partes d) y e).

Problema 2: Considere una M.A.S. $(X_1 \ldots X_n)$ de una población Gamma(α,β), con α,β desconocidos. Encuentre una expresión (o de una ecuación) para los estimadores de momentos $\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M$ y para los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V$.

Sol: Recordar que $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow f_X(x) = \dfrac{\beta (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

$$\text{y} \quad \phi_X(s) = \frac{1}{\left(1-\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha}} \quad ; \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} .$$

Entonces

i) Método de los momentos: se desconocen 2 parámetros, por lo que planteamos las ecuaciones $m_1 = \mu_1$ y $m_2 = \mu_2$:

a) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1) \Leftrightarrow \boxed{\overline{X_n} = \frac{\alpha}{\beta}} \quad (1)$$

b) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}ar(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$\boxed{\overline{X_n^2} = \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2}} \quad (2) \qquad \overline{X_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{(notación)}$$

de (1), $\alpha = \beta \overline{X_n}$ y reemplazando en (2),

$$\overline{X_n^2} = \frac{\beta^2 \overline{X_n}^2 + \beta \overline{X_n}}{\beta^2} = \overline{X_n}^2 + \frac{1}{\beta}\overline{X_n} \Rightarrow \frac{1}{\beta}\overline{X_n} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_M = \frac{\overline{X_n}}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2} \quad ; \quad \hat{\alpha}_M = \frac{\overline{X_n}^2}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2} \quad //$$

ii) Método de máxima verosimilitud.

Calculamos la función de verosimilitud (densidad conjunta)

$$L_n(\alpha,\beta) = f_{\vec{X}_n}(x_1,\dots,x_n \mid \alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i \mid \alpha,\beta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^{\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{\beta^{n\alpha} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i}}{(\Gamma(\alpha))^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\vec{x}).$$

El dominio de L_n no depende de α o β, por lo que podemos derivar la log-verosimilitud

$$l_n(\alpha,\beta) = \ln(L_n(\alpha,\beta))$$

$$= n\alpha\ln(\beta) - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

$$\Rightarrow \cdot)\ \partial_\beta l_n(\alpha,\beta) = \frac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad \text{(imposición de maximalidad)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \overline{X}_n} \quad \rightsquigarrow \left(\beta = \frac{\alpha}{\overline{X}_n}\right)$$

$$\cdot)\ \partial_\alpha l_n(\alpha,\beta) = n\ln(\beta) - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\ln(\alpha) - \ln(\overline{X}_n) - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\boxed{\ln(\alpha) - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \ln(\overline{X}_n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)}$$

Lo anterior se resuelve con métodos numéricos.

Problema 3 Se consideran dos variables normales $X \sim N(2\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$.

Se tienen dos muestras independientes: una m.a.s. $(X_1, \dots, X_n)$ de X y una $(Y_1 \dots Y_m)$ de Y.

Se consideran todos los estimadores de μ de la forma

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$$

a) Determine una condición sobre los coeficientes a_i y b_j para que el estimador $\hat{\mu}$ sea insesgado.

Sol. Para que sea insesgado, se necesita que $\mathbb{E}(\hat{\mu}) = \mu$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\mu}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{E}(Y_j) \\ &= 2\mu \sum_{i=1}^{n} a_i + \mu \sum_{j=1}^{m} b_j = \mu \quad \text{(cond. de ser insesgado)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1.$$

b) Calcule la varianza de $\hat{\mu}$, y de un problema de optimización para el estimador $\hat{\mu}$ insesgado y de mínima varianza.

Sol. $$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\mu}) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 \mathrm{Var}(Y_j) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} b_j^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \end{aligned}$$

El problema de optimización sería

$$(P) \quad \begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \\ \text{s.a.} \ 2\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1 \end{cases}$$

Para resolverlo, definimos el Lagrangiano del problema (P) como

$$L(\vec{a},\vec{b},\lambda) = f(\vec{a},\vec{b}) - \lambda g(\vec{a},\vec{b})$$

donde $f(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m} b_j^2$, $g(\vec{a},\vec{b}) = 2\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j - 1$

y el problema es (P): $\left\| \begin{array}{ll} \min & f(\vec{a},\vec{b}) \\ \text{s.a.} & g(\vec{a},\vec{b}) = 0 \end{array} \right.$.

Las condiciones de primer orden dicen: $\nabla_{(\vec{a},\vec{b})} L(\vec{a}^*,\vec{b}^*,\lambda^*) = 0$ y $\nabla_\lambda L(\vec{a}^*,\vec{b}^*,\lambda^*) = 0$

$$\Rightarrow \nabla f(\vec{a},\vec{b}) - \lambda \nabla g(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad (1) \quad ; \quad g(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad (2)$$

(1): $(2a_1, \ldots, 2a_n, 4b_1, \ldots, 4b_m) - \lambda(2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_i = 2\lambda & \forall i = 1,\ldots,n \Rightarrow a_i = \lambda \\ 4b_j = \lambda & \forall j = 1,\ldots,m \Rightarrow b_j = \lambda/4 \end{cases}$$

de (2): $2\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} \lambda + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{4} = 1$

$$\Rightarrow 2\lambda n + \frac{m}{4}\lambda = 1 = \lambda\left(2n + \frac{m}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^* = \frac{4}{8n+m}}$$

Entonces, $a_i^* = \frac{4}{8n+m}$, $b_j^* = \frac{1}{8n+m}$. y el estimador de mínima varianza es

$$\hat{\mu}^* = \frac{4}{8n+m} \overline{X}_n + \frac{1}{8n+m} \overline{Y}_m .$$

//