

Auxiliar 7  
Desigualdades y Teoremas Límites

**Problema 1 (a)** Pruebe que si  $X$  es variable aleatoria con media 0 y varianza  $\sigma^2 < \infty$ , entonces  $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

**(b)** Si el número de items producidos en una fábrica durante una semana es una v.a. con media 100 y varianza 400, calcule una cota superior para la probabilidad de que esta semana se produzcan al menos 120 items.

**Problema 2** Un conjunto de 200 personas de las cuales 100 son mujeres y 100 hombres es dividido al azar en 100 parejas. Dé una cota superior de la probabilidad de que a lo más 30 parejas sean mixtas.

**Problema 3** Si  $X$  es una variable aleatoria con distribución  $\text{Gamma}(n, 1)$ , ¿Cuan grande se necesita  $n$  para que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - 1\right| > 0,01\right) < 0,01$$

Ah?

**Problema 4** El número de días que cierto tipo de componente dura en funcionamiento hasta fallar es una variable aleatoria con distribución  $F$ , Una vez que la componente falla es inmediatamente reemplazada por otra del mismo tipo.

Sea  $X_i$  el tiempo de vida de la componente  $i$ -ésima en uso, y  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  el instante de la  $n$ -ésima falla. Se define la tasa de fallas en el largo plazo por

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n}$$

Sponiendo que los tiempos de vida de las distintas componentes son independientes (y con varianza finita), calcule  $r$ .