UChile	**Probabilidades y Estadística**	**Felipe Celery**
FCFM	**MA3403-4**	**Víctor Riquelme**
DIM	**Prim'09**	

Pauta Pregunta 1 Control 2

Problema 1 **(a)** *Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que la variable aleatoria $Y = Z^2$ tiene densidad χ_1^2.*

(b) *Sean $W_1, \dots, W_n$ variables aleatorias i.i.d., cada una con densidad χ_1^2. Demuestre que $W = \sum_{i=1}^n W_i$ sigue una distribución χ_n^2.*

Indicacion: *Use que ola función generadora de momentos de una v.a. que sigue una χ_n^2 es $\Phi(t) = (1-2t)^{-n/2}$*

(c) *Calcule la esperanza y la varianza de W.*

(d) *Concluya que si $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces $W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}(X_i - \mu_i)^2$ tiene distribucion χ_n^2.*

Solución

(a) Esta parte se puede hacer de varias maneras:

(i) Calculamos la distribucion acumulada, luego la densidad: para $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
F_{Z^2}(t) &= \mathbb{P}\left(Z^2 \leq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| \leq \sqrt{t}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t}\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(Z \leq \sqrt{t}\right) && \text{por simetria de } \mathcal{N}(0,1) \text{ en torno a } 0 \\
&= 2\int_{s=0}^{\sqrt{t}} f_Z(s)ds \\
&= 2(F_Z(\sqrt{t}) - F_Z(0))
\end{aligned}
$$

Ahora, calculamos la densidad de Z^2.

$$
\begin{aligned}
f_{Z^2}(t) &= \partial_t F_{Z^2}(t) \\
&= \partial_t(2(F_Z(\sqrt{t}) - F_Z(0))) \\
&= 2F_Z'(\sqrt{t})\partial_t(\sqrt{t}) \\
&= 2f_z(\sqrt{t})\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}t^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}
\end{aligned}
$$

usando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Se concluye que Z^2 tiene distribución χ_1^2.

(ii) La otra opcion es: calculamos la funcion generadora de momentos de Z^2, y vemos que es igual a la funcion generadora de momentos de una χ^2 de un grado de libertad (en la parte (b) esta dada la funcion generadora de momentos de una χ^2; se cambia n por 1 y se compara).

$$\begin{aligned}
\phi_{Z^2}(s) &= \mathbb{E}\left(e^{sZ^2}\right) \\
&= \int_{z\in\mathbb{R}} e^{sz^2} f_Z(z)dz \\
&= \int_{z\in\mathbb{R}} e^{sz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z\in\mathbb{R}} e^{sz^2-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z\in\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2(-2s+1)} dz
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y^2 = z^2(-2s+1) > 0$ (entonces $y = z\sqrt{-2s+1}$) , notamos que se requiere que $-2s+1 > 0$, o sea, que $s < \frac{1}{2}$. La integral nos queda:

$$\begin{aligned}
\phi_{Z^2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dy}{\sqrt{1-2s}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2s}}
\end{aligned}$$

Notamos que la anterior es la funcion generadora de momentos de una χ^2_1 (comparando con la funcion generadora de momentos de la χ^2_n dada en (b), con $n = 1$).

(b) Calculamos la f.g.m. de W:

$$\begin{aligned}
\phi_W(s) &= \mathbb{E}\left(e^{sW}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^n W_i}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{sW_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{sW_i}\right) && \text{por independencia} \\
&= \left(\mathbb{E}\left(e^{sW_1}\right)\right)^n && \text{por identica distribución} \\
&= (\phi_{W_1}(s))^n
\end{aligned}$$

donde $W_1 \sim \chi^2_1$. Ocupando la indicacion, $\phi_{W_1}(s) = \left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\phi_W(s) &= \left(\left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Lo anterior, segun la indicacion, es la f.g.m de una χ^2_n.

Para el bonus, calculamos la f.g.m. de $H \sim \chi^2_n$:

$$\begin{aligned}
\phi_H(s) &= \mathbb{E}\left(e^{sH}\right) \\
&= \int_{h \in \mathbb{R}} e^{sh} f_H(h) dh \\
&= \int_{h=0}^{\infty} e^{sh} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} h^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}h} dh \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{h=0}^{\infty} h^{\frac{n}{2}-1} e^{sh-\frac{1}{2}h} dh \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{h=0}^{\infty} h^{\frac{n}{2}-1} e^{-h(-s+\frac{1}{2})} dh
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y = h(-s+\frac{1}{2})$ (notemos que para que la integral converja necesitamos que $-s+\frac{1}{2} > 0$, o sea, $s < \frac{1}{2}$) obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi_H(s) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{y=0}^{\infty} \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(-s+\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}-1}} e^{-y} \frac{dy}{(-s+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(-s+\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}-1}} \frac{1}{(-s+\frac{1}{2})} \int_{y=0}^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(-s+\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}} \Gamma(\frac{n}{2}) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2}{-2s+1}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

(c) Se puede hacer de dos formas:

(i) Como $W = \sum_{i=1}^{n} W_1$, entonces (por linealidad de la esperanza y la independencia de las W_i, y ademas por la distribución identica):

$$\mathbb{E}\left(W\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(W_i\right) = n\mathbb{E}\left(W_1\right)$$

$$\mathbb{V}ar\left(W\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\left(W_i\right) = n\mathbb{V}ar\left(W_1\right)$$

Entonces nos basta con calcular la esperanza y la varianza de $W_1 \sim \chi^2_1$. Para ello usamos la funcion generadora de momentos:

$$
\begin{aligned}
\phi_{W_1}(s) &= (1-2s)^{-\frac{1}{2}} \\
\phi'_{W_1}(s) &= \left(-\frac{1}{2}\right)(1-2s)^{-\frac{3}{2}}(-2) \\
&= (1-2s)^{-\frac{3}{2}} \\
\phi''_{W_1}(s) &= \left(-\frac{3}{2}\right)(1-2s)^{-\frac{5}{2}}(-2) \\
&= 3(1-2s)^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

Evaluando en cero, llegamos a que $\phi'_{W_1}(0) = 1$, $\phi''_{W_1}(0) = 3$, de donde $\mathbb{E}(W_1) = \phi'_{W_1}(0) = 1$ y $\mathbb{V}ar(W_1) = \phi''_{W_1}(0) - (\phi'_{W_1}(0))^2 = 3 - 1^2 = 2$. Entonces, $\mathbb{E}(W) = n$ y $\mathbb{V}ar(W) = 2n$.

(ii) Usemos la f.g.m. de la χ^2_n:

$$
\begin{aligned}
\phi_W(s) &= (1-2s)^{-\frac{n}{2}} \\
\phi'_W(s) &= \left(-\frac{n}{2}\right)(1-2s)^{-\frac{n+2}{2}}(-2) \\
&= n(1-2s)^{-\frac{n+2}{2}} \\
\phi''_W(s) &= n\left(-\frac{n+2}{2}\right)(1-2s)^{-\frac{n+4}{2}}(-2) \\
&= n(n+2)(1-2s)^{-\frac{n+4}{2}}
\end{aligned}
$$

Entonces, evaluando las cosas anteriores en 0 se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \phi'_W(0) = n \\
\mathbb{V}ar(W) &= \phi''_W(0) - (\phi'_W(0))^2 \\
&= n(n+2) - n^2 = 2n
\end{aligned}
$$

(d) Recordar (de clases) que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces normalizando se tiene $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Definiendo $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$, notamos que $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ (por lo anterior) con todas las Z_i independientes.
Definiendo $W_i = Z_i^2$, tenemos que $W_i \sim \chi^2_1$ (por la parte (a)), son todas independientes y ademas W se puede escribir en funcion de los W_i como $W = \sum_{i=1}^n W_i$.
Por la parte (b) se concluye que W, siendo suma de χ^2_1 independientes, tiene distribucion χ^2_n.