Profesor: Felipe Célèry C.
Profesor Auxiliar: Víctor Riquelme F.

Independencia y Densidades marginales

Quedó pendiente analizar la siguiente propiedad

Proposición 1. *Dos X, Y v.a. son independientes sí y sólo sí $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Daremos una demostración completa a esta propiedad. El caso de más variables se deduce haciendo inducción sobre esta primera propiedad.

Demostración.

$\Rightarrow$) Por definición, si $X \perp\!\!\!\perp Y$ entonces $\mathbb{P}_{XY}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A) \cdot \mathbb{P}_Y(B)$. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f_{XY}(x,y)dxdy &= \int_A f_X(x)dx \int_B f_Y(y)dy \\ &= \int_A \int_B f_X(x) f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{A\times B} f_X(x) f_Y(y)dxdy\end{aligned}$$

Como esta igualdad se satisface para todo A, B entonces se concluye que

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$\Rightarrow$) Suponemos ahora que $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Calculemos

$$\mathbb{P}_{XY}(A \times B) = \int_{A\times B} f_{XY}(x,y)dxdy$$

usando la hipótesis

$$= \int_A \int_B f_X(x) \cdot f_Y(y)dxdy = \int_A f_X(x)dx \int_B f_Y(y)dy$$

entonces

$$\mathbb{P}_{XY}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A) \cdot \mathbb{P}_Y(B)$$

$\square$