Profesor: Felipe Célèry C.
Profesor Auxiliar: Víctor Riquelme F.

Teorema cambio de Variables

El Teorema de cambio de Variables tiene varias versiones. Una versión es la siguiente:

Teorema 1 (Cambio de Variables)**.** *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea D' una región abierta y acotada con $\mathrm{Adh}(D') \subseteq \Omega$, y supongamos además que T es inyectiva en D', que la matriz $T'(u)$ (jacobiano) es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u)) \left| det(T'(u)) \right| du.$$

Otra versión dice

Teorema 2 (Cambio de variables)**.** *Sean U, V dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \to V$ una función inyectiva, diferenciable con derivadas parciales continuas tal que su jacobiano es distinto de cero en todo $x \in U$. Entonces para toda función real, de soporte compacto, continua, con soporte conexo en $\varphi(U)$ se tiene que*

$$\int_{\varphi(U)} f(v)dv = \int_U f(\varphi(u)) \left| \det(D\varphi(u)) \right| du.$$

Aplicando este último al caso probabilístico se obtiene lo que necesitamos. En efecto, sea X un vector aleatorio de $\mathbb{R}^n$ y definamos $Y = H(X) \in \mathbb{R}^n$. Sea $S \in \mathbb{R}^n$, luego

$$\mathbb{P}(Y \in S) = \mathbb{P}(H(X) \in S) = \mathbb{P}(X \in H^{-1}(S)) = \int_{H^{-1}(S)} f_X(x)dx$$

donde f_X es la densidad de probabilidad de X. Usando el T.C.V. en la segunda versión queda

$$\mathbb{P}(Y \in S) = \int_S f_X(H^{-1}(y)) \left| \det(DH^{-1}(y)) \right| dy$$

es decir

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \left| \det(DH^{-1}(y)) \right|$$

con lo que se concluye. ■

Lo que no queda demostrado acá es que la función H, los conjuntos S y $H^{-1}(S)$ y la función de densidad f_X satifacen las propiedades del teorema anterior. Tal como enunciamos en cátedra nos contentaremos con que H sea de clase $\mathcal{C}^1$ y biyectiva. El hecho que esta función y la densidad satisfagan las demás propiedades es un tema delicado que requiere comprender los conceptos de *conjuntos borelianos*, *funciones medibles* y otros tópicos que no estudiaremos en este curso.