Clase Auxiliar #5 Probabilidades y Estadística Prim '08

FC; VR

*) Función Generadora de Momentos

Recuerdo: Dada una variable aleatoria X, se define la función generadora de momentos de X como

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{sX}\right)$$

·) Si X es discreta a valores en I, se calcula como

$$\phi_X(s) = \sum_{i\in I} e^{si}\,\mathbb{P}(X=i)$$

·) Si X es continua, con densidad f_X

$$\phi_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{st} f_X(t)\,dt$$

Observación Por expansión de Taylor,

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sX)^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k\,\mathbb{E}(X^k)}{k!}$$

Si derivamos j veces, queda

$$\phi_X^{(j)}(s) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{s^{k-j}\,\mathbb{E}(X^k)}{(k-j)!} = \mathbb{E}(X^j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{s^{k-j}\,\mathbb{E}(X^k)}{(k-j)!}$$

Evaluando en $s=0$,

$$\phi_X^{(j)}(0) = \mathbb{E}(X^j) \qquad \forall j \geq 1$$

Obs: ·) $\mathbb{E}(X) = \phi_X'(0)$

·) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \phi_X''(0) - \left(\phi_X'(0)\right)^2$

¿Por qué es útil la fgm?

Teorema 1 las distribuciones de dos v.a. X e Y son iguales sii $\phi_X(s) = \phi_Y(s)$ $\forall s \geq 0$.

Teorema 2. Sean X, Y variables aleatorias. Entonces

$$X \text{ e } Y \text{ son independientes} \iff \mathbb{E}\left(e^{tX+sY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{sY}\right)$$
$$= \phi_X(t)\,\phi_Y(s)$$

Problema 1

a) Calcular la fgm de $X \sim Bern(p)$ (y ver para qué 's' está bien definida)

Sol
$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{sX}\right) = e^{s\cdot 0}\,\mathbb{P}(X=0) + e^{s\cdot 1}\,\mathbb{P}(X=1)$$
$$= (1-p) + e^s p \qquad \text{bien definida para } s \in \mathbb{R}.$$

b) Calcular $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$.

Sol
$$\mathbb{E}(X) = \phi_X'(0)\,;\quad Var(X) = \phi_X''(0) - \left(\phi_X'(0)\right)^2$$

$$\phi_X'(s) = e^s p \implies \phi_X'(0) = p$$
$$\phi_X''(s) = e^s p \implies \phi_X''(0) = p$$

$$\implies \mathbb{E}(X) = p\,;\quad Var(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

Problema 2 Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas, $X_1 \sim Bern(p)$.

Demuestre que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n, p)$.

Dem: Calcularemos primero la fgm. de una v.a. $Z \sim Binom(n,p)$, y luego veremos que $\phi_Z(s) = \phi_Y(s)$, $\forall s$ donde estén definidas las funciones generadoras.

Luego concluiremos por el teorema 1

Sea $Z \sim \text{Binom}(n,p)$. Calculemos $\phi_Z(s)$.

$$\phi_Z(s) = \mathbb{E}(e^{sZ}) = \sum_{j=0}^{n} e^{sj}\,\mathbb{P}(Z=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{sj} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (e^s p)^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \left(e^s p + (1-p)\right)^n \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Ahora, calculemos $\phi_Y(s)$.

$$\phi_Y(s) = \mathbb{E}(e^{sY}) = \mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{sX_i}) \qquad \text{por el teorema 2. (e independencia)}$$

$$= \left(\mathbb{E}(e^{sX_1})\right)^n \qquad \text{por ser idénticamente distribuidas}$$

$$= \left(\phi_{X_1}(s)\right)^n \qquad \text{con } X_1 \sim \text{Bern}(p) \text{, y usamos el (P1)}$$

$$= \left(e^s p + (1-p)\right)^n$$

Vemos que $\phi_Y(s) = \phi_Z(s)$ $\forall s$. Por el teorema 1, se concluye que

$Y \sim \text{Binom}(n,p)$.

④

Problema 3 Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$.

Sol Usemos la fgm.

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} f_X(x)\, dx$$

$$\text{donde } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \phi_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2x\mu + \mu^2) + sx}\, dx$$

El exponente queda $-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 s x \right)$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x^2 - 2x(\mu + \sigma^2 s) + (\mu + \sigma^2 s)^2\right) - (\mu + \sigma^2 s)^2 + \mu^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - (\mu + \sigma^2 s)\right)^2 + \underbrace{\frac{(\mu + \sigma^2 s)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\cancel{\mu^2} + \cancel{2\sigma^2} s\mu + \sigma^{\cancel{4}2} s^2 - \cancel{\mu^2}}{\cancel{2\sigma^2}} = s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2}$$

$$\Rightarrow \phi_X(s) = e^{s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2 s))^2}\, dx}_{\text{densidad de } N(\mu + \sigma^2 s,\, \sigma^2) \text{ integrada en } \mathbb{R} = 1}$$

$$= e^{s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

Ahora, $\phi_X'(s) = e^{s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2}} \cdot \left(\mu + \frac{\sigma^2}{\cancel{2}} \cancel{2}s\right) = \phi_X(s) \left(\mu + \sigma^2 s\right)$

$$\phi_X''(s) = \left(\phi_X(s) \cdot (\mu + \sigma^2 s)\right)' = \phi_X'(s) \left(\mu + \sigma^2 s\right) + \phi_X(s) \cdot \sigma^2$$

$$= \phi_X(s) \left(\mu + \sigma^2 s\right)^2 + \phi_X(s) \cdot \sigma^2$$

Concluimos con

$$E(X) = \phi_X'(0) = \underbrace{e^{0\mu + \frac{\sigma^2}{2} 0^2}}_{\phi_X(0) = 1} \left(\mu + \sigma^2 0\right) = \mu$$

$$Var(X) = \phi_X''(0) - \left(\phi_X'(0)\right)^2 = \left(1 \left(\mu + \sigma^2 0\right)^2 + 1 \cdot \sigma^2\right) - \mu^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

//

Ejercicios propuestos

a) Si Z es va, y definimos $X = aZ + b$ (que también es va), pdq

$$\phi_X(s) = e^{sb} \phi_Z(at)$$

b) Demuestre con lo anterior que si $Z \sim N(0,1)$ y $X = \sigma Z + \mu$ $(\sigma > 0)$ entonces $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Problema 4 Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indep, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Muestre que la variable aleatoria

$R = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ tiene distribución Normal, y encuentre los parámetros de dicha distribución.

Sol Usamos f.g.m.

$$\phi_R(s) = \mathbb{E}\left(e^{Rs}\right) = \mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{s a_i X_i}\right) \qquad \text{por el teorema 2.}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(s a_i) \qquad \text{con } X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{(s a_i)\mu_i + \frac{\sigma_i^2 (s a_i)^2}{2}}$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n}\left(s a_i \mu_i + \frac{\sigma_i^2 a_i^2 s^2}{2}\right)}$$

$$= e^{s\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right) + \frac{s^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i \sigma_i)^2}$$

Definiendo $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$, es claro de lo anterior que

$$R \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad //$$

Obs: i) Si $n=2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, entonces $R = X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
(las medias se restan, pero los "errores" se suman)

ii) Si $\forall i = 1, \ldots, n$ se tiene $a_i = \frac{1}{n}$, $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2 > 0$, entonces $R = \bar{X}_n$ es lo que se llama "la media muestral". Su distribución es

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

//