UChile	**Probabilidades y Estadística**	**Felipe Celery**
FCFM	**MA3403-4**	**Victor Riquelme**
DIM	**Prim'09**	

Clase Auxiliar 5
Función Generadora de Momentos

Recuerdo

Definición $\phi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{sX}\right)$

Si X es discreta a valores en I, $\phi_X(s) = \sum_{i \in I} e^{si}\mathbb{P}(X = i)$

Si X es continua con densidad f_X, $\phi_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} f_X(x)dx$

Propiedad $\phi_X^{(j)}(0) = \mathbb{E}(X^j)$

Teorema 1 Las distribuciones de dos variables aleatorias X e Y son iguales ssi $\phi_X(s) = \phi_Y(s)$ para todo s donde las funciones esten definidas.

Teorema 2 Sean X, Y variables aleatorias. Entonces X e Y son independientes ssi $\mathbb{E}\left(e^{tX+sY}\right) = \phi_X(t)\phi_Y(s)$

Problemas

P1 Sea $X \sim Bern(p)$

- **(a)** Calcular la f.g.m. de X.
- **(b)** Calcular la esperanza y la varianza de X.

P2 Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a's i.i.d. con distribucion Bernoulli de parametro p. Demuestre que la v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n, p)$

P3 **(a)** Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calcular la esperanza y la varianza de X.

- **(b)** Sea Z v.a. y $X = aZ + b$. Demostrar que $\phi_X(s) = e^{sb}\phi_Z(as)$
- **(c)** Demuestre con lo anterior que si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $X = \sigma Z + \mu$ (con $\sigma > 0$), entonces $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

P4 Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes, con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Muestre que la variable aleatoria $R = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ tiene distribucion Normal, y encuentre los parametros de dicha distribucion.
Luego investigue los casos:

- **(a)** $n = 2, a_1 = 1, a_2 = -1$.
- **(b)** $\forall i = 1, \ldots, n$ $a_i = \frac{1}{n}$, $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2 > 0$.