Clase Auxiliar 4 Probabilidades y Estadística Prim '09 FC; VR

- Variables Aleatorias Continuas
- Esperanza, Varianza

Problema 1 Se tiene un mazo de 2N cartas, donde hay un par de 1's, un par de 2's, y así hasta un par de N's. Si se extraen m cartas del mazo, ¿cuál es el número esperado de pares que quedan en el mazo?

Sol: Para $i=1,\dots,N$ definamos la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el par de } i\text{'s queda en el mazo.} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad \text{(Bernoulli)}$$

Entonces, definiendo X como la v.a. que indica el # de pares que queda en el mazo, es claro que $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i)$$

Ahora, para calcular $\mathbb{E}(X_i)$, notamos que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, con $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$

o sea, $p = \mathbb{P}(\text{el par de } i\text{'s quede en el mazo})$

$$= \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}$$

los dejo fuera de la elección.

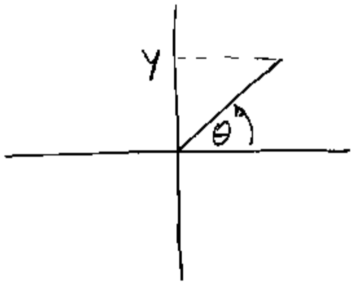
$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_i) = 0\cdot\mathbb{P}(X_i=0) + 1\cdot\mathbb{P}(X_i=1) = \mathbb{P}(X_i=1)$$
$$= \binom{2N-2}{m} \Big/ \binom{2N}{m}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) = N \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = \frac{N \frac{(2N-2)!}{(2N-2-m)!\,\cancel{m!}}}{\frac{(2N)!}{(2N-m)!\,\cancel{m!}}} = \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{(\cancel{2}N)(2N-1)}\cancel{N}$$

$$= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)} \quad /\!/$$

Problema 2 Una barra de largo 1 tiene un extremo fijo en el origen y el ángulo que forma c/ al eje x sigue una ley uniforme en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Encuentre la distribución de la proyección del extremo móvil en el eje y y calcule su densidad.

Sol



Sea θ = ángulo c/ al eje x de la barra

$\Rightarrow \theta \sim \text{Unif}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ahora, si Y = proyección en el eje y del borde de la barra, calculamos $\mathbb{P}(Y \leq t)$.

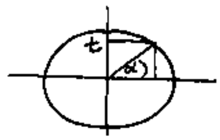
Primero, $Y = \text{sen}(\theta)$, por lo que si $t \in (-1, 1)$

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\text{sen}(\theta) \leq t) = \mathbb{P}(\theta \leq \text{arcsen}(t))$$

$$= \frac{\text{arcsen}(t)}{\pi}$$

Ahora, $f_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(Y \leq t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\text{arcsen}(t)}{\pi}$

$\alpha = \text{arcsen}(t)$



$\text{sen}(\text{arcsen}(t)) = t$

$\Rightarrow \text{sen}'(\text{arcsen}(t)) \cdot \text{arcsen}'(t) = 1$

$$\text{arcsen}'(t) = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(t))} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbb{1}_{(-1,1)}(t)}$$

Problema 3 a) Sea $\mathfrak{C} \sim Exp(\lambda)$. Calcular $\mathbb{E}(\mathfrak{C})$.

sol La densidad de $\mathfrak{C}$ es

$$f_{\mathfrak{C}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{C}) = \int_{\mathbb{R}} t f_{\mathfrak{C}}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} t \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

$$= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt$$

$u = t,\ du = dt$
$dv = e^{-\lambda t} dt,\ v = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}$

$$= \cancel{\lambda}\left(-\frac{t}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda t} dt \right)$$

$$= \text{"}\left(\cancel{0} e^{-\lambda 0} - \infty \cdot e^{-\lambda \infty}\right)\text{"} + \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{e^{-\lambda 0} - \cancel{e^{-\lambda \infty}} \to 0}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

b) Calcule $\mathbb{P}(\mathfrak{C} > t)$

sol $$\mathbb{P}(\mathfrak{C} > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda s} ds$$

$$= \cancel{\lambda} \frac{-1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda s}\Big|_t^\infty = e^{-\lambda t} - \lim_{s\to\infty} e^{-\lambda s}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

c) Sean $\mathcal{C}_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $\mathcal{C}_2 \sim Exp(\lambda_2)$, $\mathcal{C}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_2$. Calcule $\mathbb{P}(\mathcal{C}_1 < \mathcal{C}_2)$

Sol

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_1 < \mathcal{C}_2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(t < \mathcal{C}_2)\, f_{\mathcal{C}_1}(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2) t} dt$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \quad //$$

obs: También se puede pensar en la distribución exponencial como tiempo (tiempo de vida de una ampolleta, tiempo entre llegadas de personas a una cola, etc).

d) [Propiedad de Falta de Memoria] Sean $\mathcal{C} \sim Exp(\lambda)$, $s,t>0$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(\mathcal{C} > s+t \mid \mathcal{C} > t) = \mathbb{P}(\mathcal{C} > s)$$

Sol

$$\mathbb{P}(\mathcal{C} > s+t \mid \mathcal{C} > t) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{C} > s+t, \mathcal{C} > t)}{\mathbb{P}(\mathcal{C} > t)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{C} > s+t)}{\mathbb{P}(\mathcal{C} > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(\mathcal{C} > s) \quad //$$

La interpretación es (pensando en tiempos de espera) que la probabilidad de que una persona que lleva esperando la micro por t minutos (horas) tenga que esperar s minutos (horas) más es igual a la probabilidad de que al llegar al paradero haya que esperar por s minutos (horas).

Problema 4 Demuestre que la varianza de una v.a. distribuida Poisson(λ) es λ.

sol Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot n\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,n$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(n+1) = \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right)$$

$$= \lambda\sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}_{1}$$

$$= \lambda\,\mathbb{E}(X) + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda. \quad //$$