Pauta Control 1 Probabilidades y Estadística

Problema 2

a) Sea X = # de pájaros avistados.

Entonces, X se modela como una v.a con ley Poisson(λ), entonces,

(i) $$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)$$
$$= \sum_{n=n+1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

(ii) Sea Y = # de pájaros que caza en una hora. Entonces veamos que pasa con $\mathbb{P}(Y=k)$. Condicionamos en el # de pájaros avistados.

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Y=k \mid X=n)}_{\text{Prob de matar } k \text{ dado que avista } n.} \mathbb{P}(X=n)$$ por probabilidades totales.

Es una Binomial de parámetros n y p

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\, \mathbb{P}(X=n)$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}$$
$$= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \lambda^k$$
$$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}$$
$$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

$\Rightarrow Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. (+0,5)

(iii) En este caso, aumenta la tasa promedio de casos. Entonces se tienen los mismos resultados con tasa 2λ.

5) Definamos EH – "Ecografía dice Hombre" ; H = "Bebé es Hombre"
EM – "Ecografía dice Mujer" M = "Bebé es Mujer"

Entonces $\mathbb{P}(EH/H) = 0{,}99$; $\mathbb{P}(EM/M) = 0{,}9$

$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(M) = 0{,}5$

(i) $$\mathbb{P}(M/EM) = \frac{\mathbb{P}(EM/M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(EM)} \quad \text{(Bayes)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(EM/M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(EM/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(EM/H)\mathbb{P}(H)} \quad \text{(Prob. Totales)}.$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}5}{0{,}9 \cdot 0{,}5 + (1-0{,}99)\,0{,}5} = \frac{0{,}45}{0{,}455} \simeq 0{,}989.$$

Obs: De aquí,
$\mathbb{P}(EM) = 0{,}455$
$\mathbb{P}(EH) = 0{,}545$

(ii) Notar que "Ecografía se equivoca" $= (EM \cap H) \cup (EH \cap M)$. Entonces

$$\mathbb{P}(\text{Equivocarse}) = \mathbb{P}\big((EM \cap H) \cup (EH \cap M)\big) = \underbrace{\mathbb{P}(EM \cap H) + \mathbb{P}(EH \cap M)}_{= (*)} \quad (\sigma\text{-aditividad})$$

Aquí, hay 2 maneras de seguir:

i) $(*) = \mathbb{P}(EM/H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(EH/M)\mathbb{P}(M)$

$= (1-0{,}99)\, 1/2 + (1-0{,}9)\, 1/2 = 0{,}055$

ii) $(*) = \mathbb{P}(H/EM)\,\mathbb{P}(EM) + \mathbb{P}(M/EH)\,\mathbb{P}(EH)$

Habría que calcular $\mathbb{P}(H/EM) = 1 - \mathbb{P}(M/EM) = 0{,}011$, y $\mathbb{P}(M/EH) = 1 - \mathbb{P}(H/EH) = 0{,}092$

$$\mathbb{P}(H/EH) = \frac{\mathbb{P}(EH/H)\,\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(EH)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}5}{0{,}545} = 0{,}908$$

$\Rightarrow (*) = 0{,}055.$