Problema 1 Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la 1ª caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la 2ª caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la prob. de que el fósforo elegido sea bueno.

Sol Definamos los eventos C_1 = "se elige la caja 1"

FB = "se elige un fósforo bueno"

Entonces, necesitamos calcular $\mathbb{P}(FB)$. Por regla de probabilidades totales,

$$\mathbb{P}(FB) = \mathbb{P}(FB \mid C_1)\,\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(FB \mid C_1^c)\,\mathbb{P}(C_1^c)$$

Como las elecciones son al azar, $\mathbb{P}(C_1) = 1/2$ y $\mathbb{P}(C_1^c) = 1/2$,

$$\mathbb{P}(FB \mid C_1) = \frac{n_1}{n_1+n_2} \quad ; \quad \mathbb{P}(FB \mid C_1^c) = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

Entonces el resultado es

$$\mathbb{P}(FB) = \frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+n_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$

Obs: Notemos que $\frac{n_1}{n_1+n_2} = P_{C_1}$ es la proporción de fósforos buenos en la caja 1

$\frac{m_1}{m_1+m_2} = P_{C_2}$ es la proporción de fósforos buenos en la caja 2

$$\Rightarrow \mathbb{P}(FB) = \frac{1}{2}\left(P_{C_1} + P_{C_2}\right)$$

es el promedio de las proporciones de fósforos buenos en ambas cajas.

(sólo en este caso, en que las elecciones son al azar).

Problema 2 En cierta ciudad, 30% de la población es conservadora, 50% liberal y 20% independientes. Los registros muestran que en cierta elección votaron el 65% de los conservadores, 82% de los liberales y 50% de los independientes.

Si se elige una persona de la ciudad al azar y se sabe que no votó en la elección, ¿cuál es la probabilidad de que sea liberal?

Sol Sean los eventos

L = "la persona elegida es liberal"

C = "la persona elegida es conservadora"

I = "la persona elegida es independiente"

NV = "la persona elegida no votó en la elección".

Entonces $\Omega = L \cup C \cup I$. Ahora, debemos calcular usando la información que tenemos la probabilidad de que la persona sea liberal: por Bayes y prob. totales,

$$P(L/NV) = \frac{P(NV/L)\,P(L)}{P(NV)}$$

$$= \frac{P(NV|L)\,P(L)}{P(NV|L)\,P(L) + P(NV|C)\,P(C) + P(NV|I)\,P(I)}$$

$$= \frac{18\% \times 50\%}{18\% \times 50\% + 35\% \times 30\% + 50\% \times 20\%}$$

$$= \frac{0{,}09}{0{,}09 + 0{,}105 + 0{,}1} = 0{,}305\ldots$$

<u>**Problema 3**</u> Suponga que tiene una caja con dos bolas, las cuales fueron pintadas independientemente, de color blanco con probabilidad $1/2$ y negro con prob. $1/2$.

a) Si se sabe que al interior de la caja hay una bola blanca ¿cual es la probabilidad de que ambas bolas sean blancas?

b) Si se saca una bola de la caja y se ve que es blanca ¿cual es la probabilidad de que ambas bolas sean blancas?

Sol Consideremos que las bolas son distinguibles (o sea tienen nombres 'b_1' y 'b_2'), entonces definamos Ω el espacio de los posibles coloreamientos de las bolas:

$$\Omega = \{(b,b),(b,n),(n,b),(n,n)\}$$

donde la 1ª coordenada es la que corresponde al color de 'b_1' y la 2ª, al color de 'b_2'.

Sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ la σ-algebra que consideraremos, y definimos la ley de probabilidad $\mathbb{P}$ por

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4 \quad \forall \omega \in \Omega,$$

pues como cada color tiene probabilidad $1/2$ de estar en cada bola,

$$\mathbb{P}(\{(b,n)\}) = \mathbb{P}(\{(b,b)\}) = \mathbb{P}(\{(n,b)\}) = \mathbb{P}(\{(n,n)\}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1/4.$$

a) Sean los eventos B = "hay una bola blanca en la caja"
BB = "hay 2 bolas blancas en la caja"

Entonces
$$\mathbb{P}(BB/B) = \frac{\mathbb{P}(BB\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(BB)}{1-\mathbb{P}(B^c)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{(b,b)\})}{1-\mathbb{P}(\{(n,n)\})} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \quad //$$

b) Ahora, consideremos los eventos

$$B_1 = \text{" 1ª bola sacada es } b_1 \text{"}$$
$$B_2 = \text{" 1ª bola sacada es } b_2 \text{"}$$

Notamos que $B_1 \cup B_2 = \Omega$, y como la 1ª bola sacada es elegida al azar,

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 1/2.$$

Consideremos también los eventos

$$B = \text{" la bola sacada es blanca"}$$
$$BB = \text{" Hay 2 bolas blancas "}$$

Entonces
$$\mathbb{P}(BB/B) = \frac{\mathbb{P}(B/BB)\,\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B)}$$

donde
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B/B_2)\,\mathbb{P}(B_2)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\mathbb{P}(B/BB) = 1$$
$$\mathbb{P}(BB) = \mathbb{P}(\{(b,b)\}) = 1/4$$

luego,
$$\mathbb{P}(BB/B) = \frac{1 \cdot 1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \quad //$$

Ejercicio: Hacer lo mismo si la probabilidad de que b_1 sea blanca es p_1 y la probabilidad de que b_2 sea blanca es p_2 ($p_1, p_2 \in [0,1]$), y son pintadas independientemente. Notar cómo cambia la ley de probabilidad $\mathbb{P}$ definida sobre $\mathcal{F}$.

Problema 4 En cierto concurso participan k personas de la siguiente manera: se escoge al azar un número entre 1 y n_1, que si la primera persona lo adivina gana; si no, se escoge un nuevo numero al azar entre 1 y n_2 que si la segunda persona lo adivina gana; así sucesivamente, finalizando el juego cuando gana una de las personas o pierde la k-esima.

Los números naturales estan fijos $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ y conocidos en el juego ~~[illegible]~~.
Considere para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ el suceso definido por G_i = "gana la persona i".

i) ¿Que valor asignará un buen modelo probabilistico a las probabilidades condicionales

$$P(G_{i+1} \mid G_i^c \cap \dots \cap G_1^c) \quad , \text{donde } i \in \{1, \dots, k-1\} \quad ?$$

ii) ¿Que relación deben verificar los naturales $n_1, \dots, n_k$ de forma tal que todos los concursantes tengan igual probabilidad de ganar?

iii) ¿Como escogería $n_1, \dots, n_k$ de modo que todos los concursantes tengan igual probabilidad de ganar, pero siempre haya un ganador?

Sol En este caso obviaremos el espacio muestral, pero trabajaremos con los eventos

i) Notemos que el jugador i tiene posibilidad de jugar solo si todos los jugadores anteriores han perdido. Entonces, dado que todos los anteriores perdieron, la probabilidad de que el jugador 'i' gane es igual a la probabilidad de que le "achunte" a un numero entre n_i

$$\Rightarrow P(G_i \mid G_{i-1}^c \cap G_{i-2}^c \cap \dots \cap G_1^c) = \frac{1}{n_i} \quad , i = 2, \dots, k$$

$$y \quad P(G_1) = \frac{1}{n_1}$$

ii) Primero, se debe encontrar la probabilidad de que el jugador i gane, para $i \in \{2, \dots, k\}$.

Entonces, notemos que por probabilidades totales,

$$\mathbb{P}(G_i) = \mathbb{P}(G_i \mid G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c)\, \mathbb{P}(G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c)$$
$$+ \mathbb{P}(G_i \mid \overline{G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c})\, \mathbb{P}(\overline{G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c})$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(G_i / G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c)}_{1/n_i} \mathbb{P}(G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c) + \underbrace{\mathbb{P}(G_i \mid G_{i-1} \cup G_{i-2} \cup \dots \cup G_1)}_{\substack{\text{prob. de que } i \text{ gane} \\ \text{dado que alguien antes ganó} \\ = \emptyset \\ \text{(cero)}}} \mathbb{P}(G_{i-1} \cup \dots \cup G_1)$$

$$= \frac{1}{n_i} \mathbb{P}(G_{i-1}^c \cap G_{i-2}^c \cap \dots G_1^c)$$

Notemos que lo último se puede calcular como

$$\mathbb{P}(G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c) = \frac{\mathbb{P}(G_{i-1}^c \cap \dots \cap G_1^c)}{\mathbb{P}(G_{i-2}^c \cap \dots \cap G_1^c)} \frac{\mathbb{P}(G_{i-2}^c \cap \dots \cap G_1^c)}{\mathbb{P}(G_{i-3}^c \cap \dots \cap G_1^c)} \dots \mathbb{P}(G_1^c)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(G_{i-1}^c / G_{i-2}^c \cap \dots \cap G_1^c)}_{\substack{\text{prob que } i-1 \text{ pierda} \\ \text{dado que los anteriores} \\ \text{perdieron}}} \underbrace{\mathbb{P}(G_{i-2}^c \mid G_{i-3}^c \cap \dots \cap G_1^c)}_{\substack{\text{prob. que } i-2 \text{ pierda} \\ \text{dado que los anteriores} \\ \text{perdieron}}} \dots \underbrace{\mathbb{P}(G_1^c)}_{\substack{\text{prob que '1'} \\ \text{pierda}}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n_{i-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n_{i-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(G_i) = \frac{1}{n_i}\left(1 - \frac{1}{n_{i-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n_{i-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) = \frac{1}{n_i} \frac{n_{i-1}-1}{n_{i-1}} \frac{n_{i-2}-1}{n_{i-2}} \cdots \frac{n_1 - 1}{n_1}$$

Para que todos los jugadores tengan igual probabilidad de ganar, basta imponer que

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad \mathbb{P}(G_i) = \mathbb{P}(G_{i+1})$$

luego es equivalente a

$$\frac{1}{n_i}\cancel{\left(1-\frac{1}{n_{i-1}}\right)}\cancel{\left(1-\frac{1}{n_{i-2}}\right)}\cdots\cancel{\left(1-\frac{1}{n_1}\right)} = \frac{1}{n_{i+1}}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\cancel{\left(1-\frac{1}{n_{i-1}}\right)}\cdots\cancel{\left(1-\frac{1}{n_1}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{n_i}} = \frac{1}{n_{i+1}}\,\frac{n_i-1}{\cancel{n_i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_{i+1} = n_i - 1} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, k-1$$

iii) Para que siempre haya un ganador y todos tengan la misma probabilidad de ganar se debe satisfacer lo anterior, con $n_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, y además basta con tomar

$n_k = 1$ (si todos los anteriores perdieran, el jugador k está obligado a ganar).

Entonces, $n_k = 1$, $n_{k-1} = 2$, $\ldots$, $n_2 = k-1$, $n_1 = k$.

//