Clase Auxiliar #1 Probabilidad y Estadística Prim '09 Fe ; VR

Problema 1 Un mazo de 52 cartas se reparte al azar entre 4 personas. ¿cual es la probabilidad de que cada uno reciba un as?

sol Definamos los elementos probabilísticos:

Experimento = Repartir 52 cartas en grupos de 13.

$\Omega = \{ \text{permutaciones de } \{1, \ldots, 52\} \}$

consideramos un espacio de probabilidad equiprobable, ie, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Interpretación:

$$\omega = [a_1 a_2 a_3 \ldots a_{13} | a_{14} \ldots a_{26} | a_{27} \ldots a_{39} | a_{40} \ldots a_{52}]$$

las primeras 13 letras corresponden al 1° jugador, las 13 siguientes al 2° jugador, y así.

Entonces, si $A = \{ \text{a cada persona le toca un as} \}$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

sabemos que $|\Omega| = \#\text{permutaciones de } \{1, \ldots, 52\} = 52!$

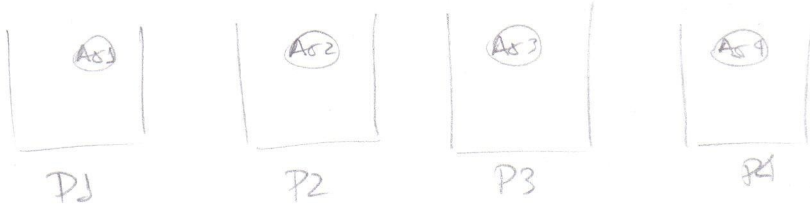
Ahora,

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{Repartir 4 ases entre} \\ \text{4 jugadores (ordenados)} \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} \text{Elegir un lugar para} \\ \text{cada as dentro de} \\ \text{cada mano} \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} \text{Repartir el resto de las} \\ \text{otras cartas entre los} \\ \text{jugadores} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |A| = 4! \times 13^4 \times 48!$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{4! \cdot 13^4 \cdot 48!}{52!} = \frac{4! \cdot 13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = 0{,}105\ldots$$

Otra forma de pensarlo: bolas y urnas



CF = casos favorables = $\left\{\begin{array}{c}\text{Distribuir los} \\ \text{Ases en los} \\ \text{jugadores}\end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{c}\text{Distribuir las 48 cartas} \\ \text{restantes entre los 4} \\ \text{jugadores, 12 para cada uno}\end{array}\right\}$

$$\# CF = 4! \cdot \binom{48}{12,12,12,12} = 4! \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}$$

CT = casos totales = Distribuir las 52 cartas entre los 4 jugadores, 13 a cada uno

$$\# CT = \binom{52}{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$$

$$\mathbb{P}(\text{1 as para cada jugador}) = \frac{\# CF}{\# CT} = \frac{4! \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$

$$= 4! \frac{48!}{52!} \cdot \frac{13!\,13!\,13!\,13!}{12!\,12!\,12!\,12!} = \frac{4!\,13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} \quad //$$

Problema 2. Si n personas (destacando 1 y 2) se ordenan aleatoriamente en una línea,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que '1' y '2' queden uno al lado del otro?

b) ¿Cuál es la prob si se ordenan en un círculo?

Sol a) Definamos el espacio de probabilidad:

$$\Omega = \{ \text{permutaciones de } \{1, \dots, n\} \} \quad ; \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$E = \{ \pi \in \Omega \,/\, |\pi(1) - \pi(2)| = 1 \}$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}, \text{ donde } |\Omega| = n! \text{ , y}$$

$$E = \left\{ \begin{matrix} \text{Asignar un lugar a} \\ * \text{ entre } n-1 \text{ lugares} \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} \text{Ordenar } n-2 \text{ numeros} \\ \text{desde el 3 al } n \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} \text{Expandir} \\ * = ab, ba \end{matrix} \right\}$$

$$|E| = (n-1) \cdot (n-2)! \cdot 2$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{(n-1)(n-2)! \cdot 2}{n!} = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}$$

b) En este caso, $\Omega = \{ \text{permutaciones de } \{1, \dots, n\} \} \; ; \; \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$E = \{ \pi \in \Omega \,/\, |\pi(1) - \pi(2)| = 1 \,,\; \pi(1) = n \wedge \pi(2) = 1 \,,\; \pi(2) = n, \pi(1) = 1 \}$$

$$|E| = (n-1) \cdot (n-2)! \cdot 2 + \overset{\text{dos casos}}{2} \cdot \underbrace{(n-2)!}_{\text{permutar } n-2 \text{ elementos, pues los extremos están fijos}}$$

$$= 2(n-2)! \, (n - \cancel{1} + \cancel{1})$$

$$= 2(n-2)! \cdot n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2(n-2)! \cdot n}{n!} = \frac{2}{n-1} \quad //$$

Problema 3 Sea $N_n=\{1,\dots,n\}$, y $\mathcal{F}_n = \{ f: N_n \to N_n \mid f \text{ es función}\}$. Cuente cual es el número de funciones que no tienen un punto fijo (f tiene un punto fijo si $\exists k\in N_n$ tal que $f(k)=k$).

sol Definamos los conjuntos $I_i = \{ f\in\mathcal{F}_n \mid f(i)=i \}$ (las funciones que tienen a 'i' como punto fijo). Entonces, notemos que

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

es el conjunto de las funciones con puntos fijos,

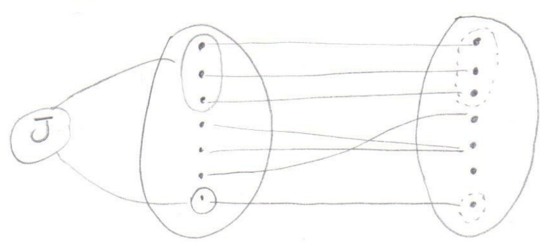
y $NF = \mathcal{F}_n \setminus I$ es el conjunto de las funciones sin puntos fijos.

Entonces, $|NF| = |\mathcal{F}_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right|$, donde los cardinales se calculan como sigue:

$$\Rightarrow |\mathcal{F}_n| = n^n$$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right| = \sum_{\substack{J\subset N_n \\ J\neq\emptyset}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j\in J} I_j\right|$$

¿Qué significa $\bigcap_{j\in J} I_j$? Es el conjunto de funciones tales que todos los elementos de J son puntos fijos de ellas. Gráficamente, es lo siguiente:



Hay que contar el # de funciones de $N_n\setminus J$ en $N_n\setminus J$, y luego "se le pegan" los puntos fijos a esas funciones

$$\Rightarrow \left|\bigcap_{j\in J} I_j\right| = |N_n\setminus J|^{|N_n\setminus J|} = (n-|J|)^{n-|J|}$$

Entonces, $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right| = \sum_{\substack{J\subseteq N_n \\ J\neq\phi}} (-1)^{|J|+1}\left(n-|J|\right)^{n-|J|}$$

¿Cuantos conjuntos de cardinal j se pueden formar en N_n? Por formula,

$$\#\ \underset{\text{en } N_n}{\text{subconjuntos de tamaño } j} = \binom{n}{j}$$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\binom{n}{j}(n-j)^{n-j}$$

$$\Rightarrow |NF| = n^n - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}(n-j)^{n-j} = \binom{n}{0}(n-0)^{n-0} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}(n-j)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}(n-j)^{n-j}$$