PAUTA Control 3 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.

a.- La velocidad (en mts/seg) de un grupo de partículas es una v.a. normal.

i) Si el 50% de las partículas tiene velocidades mayores a 20(mts/seg) y el 16% tiene velocidades menores a 15(mts/seg), determine μ y σ^2.

SOLUCIÓN
Si V denota la velocidad en estudio, se tiene que $V \sim N(\mu, \sigma^2)$, es decir $\frac{V-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
Por otra parte, se tiene que el 50% de las partículas tiene velocidad mayor a 20, es decir:

$$\mathbb{P}(V > 20) = 0,5$$

de lo que se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\frac{V-\mu}{\sigma} > \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0,5$$

Pero como $\frac{V-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, se deduce que

$$\frac{20-\mu}{\sigma} = 0$$

De aquí, se deduce que

$$\boxed{\mu = 20}$$

Por otra parte, se tiene que el 16% tiene velocidades menores a 15, es decir:

$$\mathbb{P}(V < 15) = 0,16$$

de lo que se deduce:

$$\mathbb{P}\left(\frac{V-\mu}{\sigma} < \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0,16$$

Pero como $\frac{V-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, se tiene

$$\mathbb{P}\left(\frac{V-\mu}{\sigma} > -\frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0,16$$

mirando la tabla normal, se tiene:

$$-\frac{15-\mu}{\sigma} = 1$$

como $\mu = 20$, se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{15-20}{\sigma} &= 1 \\ \frac{5}{\sigma} &= 1 \\ \sigma &= 5 \end{aligned}$$

así, se tiene:

$$\boxed{\sigma^2 = 25}$$

En adelante suponga $\mu = 21$ y $\sigma^2 = 36$

ii) Si se toman dos partículas independientes, ¿cuál es la probabilidad que sus velocidades difieren en menos de 1(mt/seg)?

SOLUCIÓN

Sean V_1 y V_2 las velocidad de cada una de las partículas. Se tiene que estas variables aleatorias son independientes.

Se quiere calcular la probabilidad que

$$\mathbb{P}(\mid V_1 - V_2 \mid < 1)$$

Dado que V_1 y V_2 son $N(21, 36)$, independientes, se tiene que

$$V_1 - V_2 \sim N(0,\, 72)$$

Por otra parte

$$\mathbb{P}(|V_1 - V_2| \quad < \quad 1) = \mathbb{P}(-1 < V_1 - V_2 < 1)$$

Dada la simetría respecto al eje $x = 0$ de la variable aleatoria $V_1 - V_2$, se tiene que

$$\mathbb{P}(V_1 - V_2 > 1) = \mathbb{P}(V_1 - V_2 < -1)$$

pero

$$\mathbb{P}(V_1 - V_2 > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{V_1 - V_2}{\sqrt{72}} > \frac{1}{\sqrt{72}}\right)$$

notando que $\frac{V_1 - V_2}{\sqrt{72}} \sim N(0, 1)$, se tiene que

$$\mathbb{P}(V_1 - V_2 > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{V_1 - V_2}{\sqrt{72}} > 0,11\right) = 0,4562$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 - V_2 < -1) + \mathbb{P}(-1 < V_1 - V_2 < 1) + \mathbb{P}(V_1 - V_2 > 1) &= 1 \\
0,4562 + \mathbb{P}(-1 < V_1 - V_2 < 1) + 0,4562 &= 1 \\
\mathbb{P}(-1 < V_1 - V_2 < 1) &= 1 - 0,9124
\end{aligned}$$

así

$$\boxed{\mathbb{P}(-1 < V_1 - V_2 < 1) = 0,0876}$$

iii) Determine n tal que $\mathbb{P}(\mid \overline{X} - \mu \mid < 0,05) = 0,9$

SOLUCIÓN

Notemos que

$$\mathbb{P}(\mid \overline{X} - \mu \mid < 0,05) = \mathbb{P}(-0,05 < \overline{X} - \mu < 0,05)$$

Dado que $X \sim N(21, 36)$, se tiene que $\overline{X} \sim N(21, \frac{36}{n})$, y además $\overline{X} - 21 \sim N(0, \frac{36}{n})$. Esto ultímo indica que la función de densidad de $\overline{X} - 21$ es simétrica respecto a el eje x=0, por lo que

$$\mathbb{P}(\overline{X} - \mu < -0,05) = \mathbb{P}(\overline{X} - \mu > 0,05)$$

luego, se tiene

$$\mathbb{P}(\overline{X} - \mu \quad < \quad -0,05) + \mathbb{P}(\mid \overline{X} - \mu \mid < 0,05) + \mathbb{P}(\overline{X} - \mu > 0,05) = 1$$

Luego

$$0,9 + 2 \cdot \mathbb{P}(\overline{X} - \mu > 0,05) = 1$$

es decir

$$\mathbb{P}(\overline{X} - \mu > 0,05) = 0,05$$

Por otra parte

$$\mathbb{P}(\overline{X} - \mu > 0,05) = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - 21)\sqrt{n}}{6} > \frac{0,05 \cdot \sqrt{n}}{6}\right) = 0,05$$

usando la tabla normal, se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{0,05 \cdot \sqrt{n}}{6} &= 1,64 \\ \sqrt{n} &= 7680 \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{n = 58.982.400}$$

b.- Se disparan dardos en forma uniforme a un disco de radio 3. Si se cae a menos de 1 unidad del centro, se obtiene 5 puntos, si se cae entre 1 unidad y 2 unidades del centro se obtiene 2 puntos; en caso contrario se obtiene 0 puntos.

i) Si U denota la v.a. "puntos obtenidos en un lanzamiento". Determine $\mathbb{E}(U)$ y $Var(U)$.

SOLUCIÓN

Notemos que U puede tomar sólo 3 valores: 5, 2 y 0.

Dado que los dardos se disparan en forma uniforme, se tiene que

$$\mathbb{P}(U=5) = \frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(U=2) = \frac{\pi \cdot (2^2 - 1^2)}{\pi \cdot 3^2} = \frac{3}{9}$$

$$\mathbb{P}(U=0) = \frac{\pi \cdot (3^2 - 2^2)}{\pi \cdot 3^2} = \frac{5}{9}$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= 5 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{5+6}{9} \end{aligned}$$

Así

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{11}{9}}$$

Por otra parte

$$Var(U) = \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U^2) &= 5^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{5}{9} \\ &= 25 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{25+12}{9} \end{aligned}$$

así

$$\mathbb{E}(U^2) = \frac{37}{9}$$

luego

$$\begin{aligned} Var(U) &= \frac{37}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 \\ &= \frac{333-121}{81} \end{aligned}$$

así

$$\boxed{Var(U) = \frac{212}{81}}$$

ii) Si se disparan 50 dardos. Calcule la probabilidad de obtener al menos 65 puntos.

SOLUCIÓN

Se quiere calcular:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right)$$

se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{50} U_i\right)}{50} > \frac{65}{50}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right) = \mathbb{P}\left(\overline{U} - \frac{11}{9} > \frac{65}{50} - \frac{11}{9}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left(\overline{U} - \frac{11}{9}\right)\sqrt{50}}{\sqrt{\frac{212}{81}}} > \frac{\left(\frac{65}{50} - \frac{11}{9}\right)\sqrt{50}}{\sqrt{\frac{212}{81}}}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left(\overline{U} - \frac{11}{9}\right)\sqrt{50}}{\sqrt{\frac{212}{81}}} > 0,34\right)$$

Por el Teorema Central del Límite, se puede decir que

$$\frac{\left(\overline{U} - \frac{11}{9}\right)\sqrt{50}}{\sqrt{\frac{212}{81}}} \sim N(0,1)$$

Se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\left(\overline{U} - \frac{11}{9}\right)\sqrt{50}}{\sqrt{\frac{212}{81}}} > 0,34\right) = 0,3669$$

es decir

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} U_i > 65\right) = 0,3669}$$

Pregunta 2.

a.- Considere una v.a. $X \sim exponencial(\alpha)$**, sea** $\theta = 1/\alpha$

i) Se toma una m.a. de tamaño dos, X_1, X_2 **y se proponen los siguientes estimadores de** θ**.**

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \widehat{\widehat{\theta}} = \frac{X_1 + X_2}{3}$$

Basado en el criterio del Error Cuadrático medio, determine qué estimador es "preferible".

SOLUCIÓN

Si consideramos que si $X \sim exponencial(\alpha)$, se tiene que:

$$f_X(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}$$

entonces

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha} \quad Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Calculemos el error cuadrático medio para cada uno de los estimadores:

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{\theta}) &= Var(\hat{\theta}) + sesgo(\widehat{\theta})^2 \\
&= Var\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) - \theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot Var(X_1 + X_2) + \left(\frac{1}{2} \cdot [\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)] - \theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}[Var(X_1) + Var(X_2)] + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
ECM\left(\widehat{\widehat{\theta}}\right) &= Var\left(\widehat{\widehat{\theta}}\right) + sesgo\left(\widehat{\widehat{\theta}}\right)^2 \\
&= Var\left(\frac{X_1 + X_2}{3}\right) + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2}{3}\right) - \theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \cdot Var(X_1 + X_2) + \left(\frac{1}{3} \cdot [\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)] - \theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}[Var(X_1) + Var(X_2)] + \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{-1}{3}\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

Luego, como $ECM(\widehat{\widehat{\theta}}) < ECM(\widehat{\theta})$, se tiene que bajo el criterio del error cuadrático medio, es preferible el estimador $\widehat{\widehat{\theta}}$.

ii) Se toma una m.a. de tamaño n de X. Determine el EMV de θ y para n grande determine su distribución.

SOLUCIÓN

Calculemos el estimador de máxima verosimilitud para α. Se tiene que la función se verosimilitud está dada por:

$$\begin{aligned} L(X_1,...,X_n|\alpha) &= \prod_{i=1}^{n}\alpha\cdot e^{-\alpha x_i} \\ &= \alpha^n e^{\sum_{i=1}^{n}-\alpha x_i} \\ &= \alpha^n e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i} \end{aligned}$$

luego

$$log(L(X_1,...,X_n|\alpha)) = n\cdot log(\alpha)-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i$$

derivando con respecto a α, se tiene

$$\frac{\partial log(L(X_1,...,X_n|\alpha))}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

así, igualando a cero se tiene

$$\begin{aligned} \frac{n}{\alpha_{EMV}}-\sum_{i=1}^{n}x_i &= 0 \\ \frac{1}{\alpha_{EMV}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \\ \alpha_{EMV} &= \frac{1}{\overline{X}} \end{aligned}$$

Luego, por la propiedad de invarianza, se tiene:

$$\boxed{\theta_{EMV}=\frac{1}{\alpha_{EMV}}=\overline{X}}$$

Con esto, y usando el Teorema Central del Límite, es directo que

$$\theta_{EMV}=\overline{X}\sim N(\mathbb{E}(X),\frac{Var(X)}{n})$$

es decir

$$\theta_{EMV}=\overline{X}\sim N\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha^2 n}\right)$$

$$\boxed{\theta_{EMV}\sim N(\theta,\frac{\theta^2}{n})}$$

iii) Considere el resultado anterior para construir un intervalo de confianza de θ, con confianza $1-\alpha = 0,9$

SOLUCIÓN

Con la parte anterior, se tiene:

$$\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} \sim N(0,1)$$

Dado el nivel de confianza, se quiere encontrar el número h, tal que

$$\mathbb{P}(-h < \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} < h) = 0,9$$

Lo que, por la simetría de la normal es equivalente a

$$\mathbb{P}(Z < h) = 0,95$$

o bien

$$\mathbb{P}(Z > h) = 0,05$$

donde $Z \sim N(0,1)$.

Por medio de la tabla normal, se tiene:

$$h \approx 1,64$$

se tiene entonces, que con una confianza del 90% se tiene la siguiente desigualdad

$$-1,64 \quad < \quad \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} < 1,64$$

$$-1,64 \quad < \quad \frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\theta} - \sqrt{n} < 1,64$$

$$\sqrt{n} - 1,64 \quad < \quad \frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\theta} < \sqrt{n} + 1,64$$

así, el intervalo de confianza es de la forma:

$$\boxed{\frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1,64} < \theta < \frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1,64}}$$

b.- Sea θ la temperatura de un cuerpo (θ desconocido) Se dispone de dos termómetros tal que el primero entrega una temperatura T_1 con $\mathbb{E}(T_1) = \theta$ y $Var(T_1)$ y el segundo una temperatura T_2 con $\mathbb{E}(T_2) = \theta$ y $Var(T_2)$. Sea $T = \alpha T_1 + \beta T_2$. Determine α, β para que T sea un estimador insesgado de θ y tenga varianza mínima. (T_1 y T_2 son independientes)

SOLUCIÓN

Pedir que T sea insesgado equivale a:

$$\mathbb{E}(T) = \theta$$

es decir

$$\mathbb{E}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \theta$$

pero

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha T_1 + \beta T_2) &= \alpha\mathbb{E}(T_1) + \beta\mathbb{E}(T_2) \\ &= \alpha\theta + \beta\theta \\ &= (\alpha + \beta)\theta \end{aligned}$$

luego, pedir que el estimador sea insesgado equivale a

$$(\alpha + \beta)\theta = \theta$$

$$\boxed{\alpha + \beta = 1}$$

pedir que tenga varianza mínima, equivale a minimizar

$$\begin{aligned} Var(T) &= Var(\alpha T_1 + \beta T_2) \\ &= \alpha^2 Var(T_1) + \beta^2 Var(T_2) \end{aligned}$$

luego, como se quiere que el además el estimador sea insesgado, se tiene que la varianza de T está dada por:

$$Var(T) = \alpha^2 Var(T_1) + (1 - \alpha)^2 Var(T_2)$$

luego, para encontrar el valor de α que minimiza la varianza, simplemente se deriva y se iguala a cero, teniendo:

$$\frac{\partial Var(T)}{\partial \alpha} = 2\alpha Var(T_1) - 2(1 - \alpha)Var(T_2) = 0$$

luego

$$2\alpha\left(Var(T_1) + Var(T_2)\right) = 2Var(T_2)$$

se tiene

$$\boxed{\alpha = \frac{Var(T_2)}{Var(T_1) + Var(T_2)}}$$

por lo que

$$\boxed{\beta = \frac{Var(T_1)}{Var(T_1) + Var(T_2)}}$$

Pregunta 3.

a.- Se sospecha que cierto río está altamente contaminado con bacterias, superando el nivel permitido (que es de 200 por unidad de volumen (UV)). Se toma una muestra de tamaño 10, es decir, se toma 10 UV, contando la cantidad de bacterias y obteniendo:

175	190	215	198	184
207	210	193	196	180

Suponga que la cantidad de bacterias por UV tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$

i) Suponiendo conocido σ^2 $(\sigma^2 = 169)$**. Determine el intervalo de confianza simétrico para** μ **con confianza 0,99.**

SOLUCIÓN

Se tiene que la media empírica (muestral) es:

$$\overline{X}_{emp} = 194,8$$

por otra parte, se tiene que

$$\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{10}}{13} \sim N(0,1)$$

Se quiere encontrar el valor de h tal que

$$\mathbb{P}(-h < \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{10}}{13} < h) = 0,99$$

lo que equivale a

$$\mathbb{P}(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{10}}{13} > h) = 0,005$$

se tiene que el valor de h es aproximadamente a 2,56.

Luego

$$\mathbb{P}(-2,56 < \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{10}}{13} < 2,56) = 0,99$$

pero

$$\mathbb{P}(-2,56 < \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{10}}{13} < 2,56) = \mathbb{P}(-10,5241 < \overline{X} - \mu < 10,5241)$$

así

$$\mathbb{P}(\overline{X} - 10,5241 < \mu < \overline{X} + 10,5241) = 0,99$$

luego, el intervalo de confianza es:

$$\boxed{I.C.\, al\, 99\% : \quad [184,2759\, ;\, 205,3241]}$$

ii) Un estudiante dice que no hay problemas de contaminación ya que había calculado un intervalo de confianza simétrico para μ, obteniendo

$$(190,6\,;\,199)$$

¿Qué confianza tiene ese intervalo?
¿Qué puede concluir de i) y de lo dicho por el estudiante?

SOLUCION

Se tiene

$$\mathbb{P}(-h < \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} < h) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}(\overline{X} - \frac{13}{\sqrt{10}}h < \mu < \overline{X} + \frac{13}{\sqrt{10}}h) = 1-\alpha$$

donde $\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} \sim N(0,1)$
Por simetría, se tiene

$$\mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} < h) = 1-\alpha+\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{\alpha}{2}$$

por otra parte, se tiene que el

$$\begin{aligned} \overline{X} - \frac{13}{\sqrt{10}}h &= 190,6 \\ \overline{X} + \frac{13}{\sqrt{10}}h &= 199 \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$h = 1,0217$$

Luego

$$\mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} < h) = \mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} < 1,0217) = 1 - \mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} > 1,0217)$$

mirando la tabla normal se tiene

$$\mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} < h) = 1 - \mathbb{P}(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{10}}{13} > 1,0217) = 1 - 0,1539$$

es decir

$$\frac{\alpha}{2} = 0,1539$$

luego

$$\alpha = 0,3078$$

Es decir, la confianza del intervalo propuesto es de 69,22%.
Claramente, es una confianza muy baja, por lo que el intervalo presentado no puede ser considerado para tomar alguna desición.

iii) Determine un intervalo de confianza del 95% para σ^2.

SOLUCION

Sabemos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

En este caso, $n=10$.
Un intervalo de la forma [0,h], pediría determinar h, tal que

$$\mathbb{P}(h<\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2})=0,95$$

Luego, como

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{9}$$

mirando las tablas, se tiene que $h=3,33$.
Por otra parte, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=1553,6$$

luego

$$\mathbb{P}(h<\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2})=\mathbb{P}\left(\sigma^2<\frac{1553,6}{3,33}\right)=0,95$$

así, un intervalo de confianza para la varianza del 95% sería el intervalo

$$[0;\,466,5465]$$

b.- Sea X v.a. con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta c^{\beta}}{x^{\beta+1}} & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

basado en una m.a $X_1, ..., X_n$

Determine el EMV de β, suponiendo c conocido. Además determine el EMV de c.

SOLUCIÓN

Se tiene que la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned} L(X_1, ..., X_n|\beta, c) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta c^{\beta}}{x_i^{\beta+1}} \\ &= \frac{\beta^n c^{n\beta}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\beta+1}} \end{aligned}$$

tomando logaritmo queda

$$log(L(X_1, ..., X_n|\beta, c)) = n \cdot log(\beta) + n\beta log(c) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

derivando con respecto a beta se tiene

$$\frac{\partial log(L(X_1, ..., X_n|\beta, c))}{\partial \beta} = n \cdot \frac{1}{\beta} + nlog(c) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

igualando a cero se tiene

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{1}{\beta} + nlog(c) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i) &= 0 \\ \frac{1}{\beta} + log(c) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log(x_i) &= 0 \\ \frac{1}{\beta} &= -log(c) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log(x_i) \end{aligned}$$

así, el estimador de máxima verosimilitud para β suponiendo c conocido, es:

$$\boxed{\beta_{EMV} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log(x_i) - log(c)}}$$

Ahora bien, si se deriva con respecto a c, se obtiene que:

$$\frac{\partial log(L(X_1, ..., X_n|\beta, c))}{\partial c} = \frac{n\beta}{c}$$

lo que al ser igualado a cero, se llega a una contradicción.
De este modo, se debe hacer otro análisis para la estimación de máxima verosimilitud de c.
Veamos nuevamente el logaritmo de la función de verosimilitud

$$log(L(X_1, ..., X_n|\beta, c)) = n \cdot log(\beta) + n\beta log(c) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

Esto puede ser visto como una función lineal afín, con pendiente positiva, de la variable $log(c)$

Pero notemos que esta ecuación se tiene si y sólo si $c < x_i \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}$, de modo que imponiendo la condición anterior, la función se maximiza en el punto

$$\boxed{c_{EMV} = \min_{i \in \{1, ..., n\}} x_i}$$