Auxiliar N°12. Preparativos Control 3

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Primavera 2009
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

RESUMEN.

Estadísticos Útiles.
Si $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene:

$$\frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{(\overline{X} - \mu)}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

EJERCICIOS.

1.-Suponga que T, el tiempo para fallar (en horas) de un instrumento electrónico, tiene la siguiente fdp:

$$\begin{aligned} f(t) &= \beta e^{-\beta(t-t_0)} \quad t > t_0 > 0 \\ &= 0 \;\; para\, cualquier\, otro\, valor \end{aligned}$$

Suponga que se prueban n artículos y que se anotan los tiempos para fallar $T_1, ..., T_n$.
a) Suponiendo que t_0 es conocido, obtener el estimador de Máxima Verosimilitud de β.
b) Suponiendo que t_0 es deconocido, encontrar el estimador de Máxima Verosimilitud de t_0.

2.- Sea $X \sim N(2\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$. Sea una m.a.s. $X_1, ..., X_n$ de X y otra muestra aleatoria simple independiente de la anterior, $Y_1, ..., Y_m$ de Y. Se considera el estimador de μ.

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$$

i) Determine condiciones sobre los coeficientes a_i y b_i para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado.
ii) Determine condiciones sobre a_i y b_i para que $\hat{\mu}$ sea insesgado y se varianza mínima.

3.- Sea una m.a.s. $X_1, ..., X_n$ de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ desconocida y $\sigma^2 = 9$.
i) Dé un intervalo de confianza de largo mínimo para un nivel de confianza 0.95.
ii) ¿Qué tamaño mínimo de muestra hay que tomar para tener un intervalo de largo igual o a lo más $2/5$?
iii) Suponga que X_i tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con σ desconocido. Deduzca el intervalo de confianza para μ con $\alpha = 0.05$ y $n = 21$. Determine el largo del intervalo.

4.- Suponga $X_1, ..., X_{50}$ variables aleatorias independientes que tienen cada una una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 0,03$. Sea $S = X_1 + ... + X_{50}$
a) Usando el TCL, calcular $\mathbb{P}(S \geq 3)$.
b) Comparar la respuesta con el cálculo exacto.

5.- Se sabe que en una muestra aleatoria de 10 vigas de acero, la resistencia promedio a la composición es:

$$\overline{X}_n = 57.498\, libras/pulgadas^2 \quad S_n = 539\, libras/pulgadas^2$$

Tomando $\alpha = 0.01$ Realice el test, suponiendo que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &> 57.000 \\ H_1 : \mu &< 57.000 \end{aligned}$$