PAUTA-Control 3 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Víctor Carmi - Abelino Jiménez

Pregunta 1.

a.- (1.5 puntos) Sean $X_1 \sim N(1,4)$ y $X_2 \sim N(1,4)$ independientes. Calcule $P(|\ X_1 - 2X_2\ | > 1)$

SOLUCIÓN

a.- Si $X_1 \sim N(1,4)$ y $X_2 \sim N(1,4)$ independientes, entonces, sin problemas podemos decir que

$$X_1 - 2X_2 \sim N((1 - 2 \cdot 1)\ ,\ (4 + (-2)^2 \cdot 4))$$

es decir

$$X_1 - 2X_2 \sim N(-1\ ,\ 20)$$

luego

$$\frac{X_1 - 2X_2 + 1}{\sqrt{20}} \sim N(0\ ,\ 1)$$

Por otra parte, calcule $P(|\ X_1 - 2X_2\ | > 1)$, es equivalente a calcula $P(X_1 - 2X_2 > 1 \quad \vee \quad X_1 - 2X_2 < -1)$ como representan conjuntos disjuntos, entonces se tiene que

$$P(|\ X_1 - 2X_2\ | > 1) = P(X_1 - 2X_2 > 1) \quad + \quad P(X_1 - 2X_2 < -1)$$

pero

$$P(X_1 - 2X_2 > 1) = P(X_1 - 2X_2 + 1 > 2) = P(\frac{X_1 - 2X_2 + 1}{\sqrt{20}} > \frac{2}{\sqrt{20}})$$

$$= 1 - P(\frac{X_1 - 2X_2 + 1}{\sqrt{20}} < \frac{2}{\sqrt{20}}) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sqrt{20}})$$

por otra parte

$$P(X_1 - 2X_2 < -1) = P(X_1 - 2X_2 + 1 < 0) = P(\frac{X_1 - 2X_2 + 1}{\sqrt{20}} < 0) = \Phi(0)$$

Luego,

$$P(|\ X_1 - 2X_2\ | > 1) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sqrt{20}}) + \Phi(0)$$

Numéricamente sería

$$P(|\ X_1 - 2X_2\ | > 1) = 1 - 0,672 + 0,5 = 0,827$$

b.- (1.5 puntos) Sean $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Determine C tal que $P(X_1 > C) = P(X_2 < C)$. Analice los casos $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \to 0$

SOLUCIÓN

b.- Notemos que, dado el problema, se tiene que

$$\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$$

$$\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$$

Luego, se tiene que

$$P\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} > \frac{C - \mu_1}{\sigma_1}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} < \frac{C - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

Entonces, por simple simetría de la integral se tiene

$$\frac{C - \mu_1}{\sigma_1} = -\frac{C - \mu_2}{\sigma_2}$$

Y despejando, se tiene

$$C = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2 + \mu_2 \cdot \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Veamos los casos particulares.
Si $\sigma_1 = \sigma_2$, entonces

$$C = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_1 + \mu_2 \cdot \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_1} = \frac{\sigma_1(\mu_1 + \mu_2)}{2 \cdot \sigma_1} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}$$

Si $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \to 0$, entonces $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \to 0$.
Veamos que

$$C = \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2 + \mu_2 \cdot \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{(\mu_1 \cdot \sigma_2 + \mu_2 \cdot \sigma_1)/\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2 \cdot (\sigma_1/\sigma_2)}{(\sigma_1/\sigma_2) + 1}$$

y tomando límite, queda

$$C = \mu_1$$

c.- (3 puntos) Una estación de servicio ha recopilado la siguiente información para un día cualquiera: la cantidad de automovilistas que llegará a poner bencina es de 300, la cantidad de bencina que pone un automovilista es una v.a. con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{40} - \frac{2x}{40^2} & 0 < x < 40 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que la estación de servicio venda en un día cualquiera más de 4500 litros de bencina.

SOLUCIÓN

c.- Es claro que deberemos ocupar el Teorema Central del Límite, este dice:

$$P\left(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} < C\right) \approx \Phi(C)$$

cuando n es grande.
Consideraremos que $n = 300$ es suficientemente grande como aplicar el TCL.
Queremos calcular

$$P\left(\sum_{i=1}^{300} X_i > 4500\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{300} X_i < 4500\right)$$

donde cada X_i tiene la distribución dada por el problema.
Luego, trabajando algebráicamente, se tiene

$$P\left(\sum_{i=1}^{300} X_i < 4500\right) = P(\overline{X} < \frac{4500}{300}) = P\left(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{300}}{\sigma} < \frac{(15 - \mu)\sqrt{300}}{\sigma}\right)$$

se tiene entonces

$$P\left(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{300}}{\sigma} < \frac{(15 - \mu)\sqrt{300}}{\sigma}\right) \approx P\left(Z < \frac{(15 - \mu)\sqrt{300}}{\sigma}\right)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$
Debemos entonces, calcular μ y σ. Se tiene

$$\mu = \int_0^{40} \frac{2x}{40} - \frac{2x^2}{40^2} = \frac{40}{3}$$

Para calcular σ, vamos a calcular el momento de orden 2.

$$E(X^2) = \int_0^{40} \frac{2x^2}{40} - \frac{2x^3}{40^2} = \frac{40^2}{6}$$

Luego

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{40^2}{6} - \frac{40^2}{9} = \frac{40^2}{18}$$

entonces

$$\sigma = \frac{40}{\sqrt{18}}$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P\left(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{300}}{\sigma} < \frac{(15 - \mu)\sqrt{300}}{\sigma}\right) \approx P\left(Z < \frac{(15 - \frac{40}{3})\sqrt{300}}{\frac{40}{\sqrt{18}}}\right) = \Phi\left(\frac{(\frac{5}{3})10\sqrt{3}}{\frac{40}{3\sqrt{2}}}\right) = \Phi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = 0,99$$

luego, la probabilidad pedida es aproximadamente 0,01