Probabilidades y Estadística

Clase Auxiliar

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Víctor Carmi - Abelino Jiménez

Universidad de Chile

Indice General

Indice General

Advertencias y Recomendaciones

- Tener presente siempre de qué se está hablando.
- Distinguir entre variables aleatorias, números desconocidos y valores muestrales.
- Cuidado con la Notación.

Advertencias y Recomendaciones

- Tener presente siempre de qué se está hablando.
- Distinguir entre variables aleatorias, números desconocidos y valores muestrales.
- Cuidado con la Notación.

Advertencias y Recomendaciones

- Tener presente siempre de qué se está hablando.
- Distinguir entre variables aleatorias, números desconocidos y valores muestrales.
- Cuidado con la Notación.

Muestras Aleatorias

Definición MUESTRA ALEATORIA

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n vs. as ind, cada una con la misma distribución de X. Se dice que $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de X.

Definición ESTADISTICO

Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X y sean $x_1, ..., x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para $(x_1, ..., x_n)$. Se dice que $Y = H(X_1, ..., X_n)$ es un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, ..., x_n)$.

OBSERVACIONES:

- Una muestra aleatoria se puede considerar como n mediciones de la variable X.
- Un Estadístico es una variable aleatoria.

Muestras Aleatorias

Definición MUESTRA ALEATORIA

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad. Sean $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ n vs. as ind, cada una con la misma distribución de X. Se dice que $(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)$ una muestra aleatoria de X.

Definición ESTADISTICO

Sea $X_1, \ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X y sean $x_1, \ldots,\ x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para $(x_1, \ldots,\ x_n)$. Se dice que $Y = H(X_1, \ldots,\ X_n)$ es un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, \ldots,\ x_n)$.

OBSERVACIONES:

- Una muestra aleatoria se puede considerar como n mediciones de la variable X.
- Un Estadístico es una variable aleatoria.

Muestras Aleatorias

Definición MUESTRA ALEATORIA

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n vs. as ind, cada una con la misma distribución de X. Se dice que $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de X.

Definición ESTADISTICO

Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X y sean $x_1, ..., x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para $(x_1, ..., x_n)$. Se dice que $Y = H(X_1, ..., X_n)$ es un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, ..., x_n)$.

OBSERVACIONES:

- Una muestra aleatoria se puede considerar como n mediciones de la variable X.
- Un Estadístico es una variable aleatoria.

Muestras Aleatorias

Definición MUESTRA ALEATORIA

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n vs. as ind, cada una con la misma distribución de X. Se dice que $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de X.

Definición ESTADISTICO

Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X y sean $x_1, ..., x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para $(x_1, ..., x_n)$. Se dice que $Y = H(X_1, ..., X_n)$ es un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, ..., x_n)$.

OBSERVACIONES:

- Una muestra aleatoria se puede considerar como n mediciones de la variable X.
- Un Estadístico es una variable aleatoria.

Algunos Estadísticos Importantes

Sean $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de la v.a. X. Los siguientes estadísticos son de interés:

Promedio Muestral

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Varianza Muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

Algunos Estadísticos Importantes

Sean $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de la v.a. X. Los siguientes estadísticos son de interés:

Promedio Muestral

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Varianza Muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

Algunos Estadísticos Importantes

Sean $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de la v.a. X. Los siguientes estadísticos son de interés:

Promedio Muestral

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Varianza Muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

Algunos Estadísticos Importantes

Mínimo de la Muestra

$$K = min(X_1, ..., X_n)$$

Máximo de la Muestra

$$M = max(X_1, ..., X_n)$$

Recorrido de la Muestra

$$R = M - m$$

Algunos Estadísticos Importantes

Mínimo de la Muestra

$$K = min(X_1, ..., X_n)$$

Máximo de la Muestra

$$M = max(X_1, ..., X_n)$$

Recorrido de la Muestra

$$R = M - m$$

Algunos Estadísticos Importantes

Mínimo de la Muestra

$$K = min(X_1, ..., \ X_n)$$

Máximo de la Muestra

$$M = max(X_1, ..., \ X_n)$$

Recorrido de la Muestra

$$R = M - m$$

Algunas Cosas Conocidas

Teorema

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral de una muestra aleatoria simple de tamaño n. Entonces

(a) $E(\overline{X}) = \mu$

(b) $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(c) Para n grande, $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$

OBSERVACIÓN.

(c) se aplica para n grande. De lo contrario hay que encontrar la distribución de $\overline{X}$.

Algunas Cosas Conocidas

Teorema

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral de una muestra aleatoria simple de tamaño n. Entonces

(a) $E(\overline{X}) = \mu$

(b) $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(c) Para n grande, $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$

OBSERVACIÓN.
(c) se aplica para n grande. De lo contrario hay que encontrar la distribución de $\overline{X}$.

Algunas Cosas Conocidas

Teorema

Sea X una v.a. continua con fdp f y fda F. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X y sean K y M el mínimo y el máximo de la muestra respectivamente. Luego:

(a) La fdp de M está dada por $g(m) = n\,[F(m)]^{n-1}\, f(m)$

(b) La fdp de K está dada por $h(k) = n\,[1 - F(k)]^{n-1}\, f(k)$

EJERCICIO PARA REPASAR.

Tomar el caso en que la distribución sea exponencial.

Algunas Cosas Conocidas

Teorema

Sea X una v.a. continua con fdp f y fda F. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X y sean K y M el mínimo y el máximo de la muestra respectivamente. Luego:

(a) La fdp de M está dada por $g(m) = n\left[F(m)\right]^{n-1} f(m)$

(b) La fdp de K está dada por $h(k) = n\left[1 - F(k)\right]^{n-1} f(k)$

EJERCICIO PARA REPASAR.

Tomar el caso en que la distribución sea exponencial.

Indice General

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad dependiente de un parametro θ. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra de X y sean $x_1, ..., x_n$ los valores muestrales. Si $g(X_1, ..., X_n)$ es una función de la muestra que va a ser usada para estimar θ, nos referimos a g como un **estimador** de θ. Llamaremos a $\hat{\theta} = g(x_1, ..., x_n)$ estimación de θ.

OBSERVACION (ABUSO DE NOTACIÓN):
$\hat{\theta}$ v/s θ
Para nosotros $\hat{\theta}$ es una v.a. y θ un número desconocido.
hablaremos de $E(\hat{\theta})$ como $E(g(X_1, ..., X_n))$

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad dependiente de un parametro θ. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra de X y sean $x_1, ..., x_n$ los valores muestrales. Si $g(X_1, ..., X_n)$ es una función de la muestra que va a ser usada para estimar θ, nos referimos a g como un **estimador** de θ. Llamaremos a $\hat{\theta} = g(x_1, ..., x_n)$ estimación de θ.

OBSERVACION (ABUSO DE NOTACIÓN):
$\hat{\theta}$ v/s θ
Para nosotros $\hat{\theta}$ es una v.a. y θ un número desconocido.
hablaremos de $E(\hat{\theta})$ como $E(g(X_1, ..., X_n))$

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR INSESGADO

Sea $\hat{\theta}$ una estimación del parámetro desconocido θ asociado a la distribución de la v. a. X. Entonces $\hat{\theta}$ es un **estimador insesgado** para θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ para cualquier θ.

Definición ESTIMADOR DE VARIANZA MINIMA

Sea $\hat{\theta}$ una estimación insesgada de θ. Diremos que $\hat{\theta}$ es una **estimación de varianza mínima** de θ si para todas las estimaciones $\theta*$ tales que $E(\theta*) = \theta$, tenemos $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\theta*)$ para cualquie θ.

Es decir, entre todas las estimaciones insesgadas de θ, $\hat{\theta}$ tiene la varianza más pequeña.

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR INSESGADO

Sea $\hat{\theta}$ una estimación del parámetro desconocido θ asociado a la distribución de la v. a. X. Entonces $\hat{\theta}$ es un **estimador insesgado** para θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ para cualquier θ.

Definición ESTIMADOR DE VARIANZA MINIMA

Sea $\hat{\theta}$ una estimación insesgada de θ. Diremos que $\hat{\theta}$ es una **estimación de varianza mínima** de θ si para todas las estimaciones $\theta*$ tales que $E(\theta*) = \theta$, tenemos $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\theta*)$ para cualquie θ.
Es decir, entre todas las estimaciones insesgadas de θ, $\hat{\theta}$ tiene la varianza más pequeña.

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR CONVERGENTE

Sea $\hat{\theta}$ una estimación de θ. Se dice que $\hat{\theta}$ es una **estimación convengente** a θsi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\mid \hat{\theta} - \theta \mid > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\mid \hat{\theta} - \theta \mid \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

OBSERVACION:

En general, decir a patir de la definición, si el estimador es consistente es algo difícil. Para facilitar las cosas se tiene el siguiente teorema.

Definiciones Básicas

Definición ESTIMADOR CONVERGENTE

Sea $\hat{\theta}$ una estimación de θ. Se dice que $\hat{\theta}$ es una **estimación convengente** a θsi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\mid \hat{\theta}-\theta \mid > \varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\mid \hat{\theta}-\theta \mid \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall\varepsilon > 0$$

OBSERVACION:
En general, decir a patir de la definición, si el estimador es consistente es algo difícil. Para facilitar las cosas se tiene el siguiente teorema.

Teorema de Consistencia

TEOREMA

Sea $\hat{\theta}$ una estimación de θ. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ y si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es una estimación convergente de θ.

DEMOSTRACION

Tenemos la Desigualdad de Chebyshev:

$$P(\mid \hat{\theta} - \theta \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

Con el teorema anterior, se tiene inmediatamente que

TEOREMA

Sea X v.a. con esperanza μ y varianza σ^2. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral obtenido de una muestra de tamaño n. Entonces $\overline{X}$ es un estimador insesgado y convergente a μ.

Teorema de Consistencia

TEOREMA

Sea $\hat{\theta}$ una estimación de θ. Si $\lim_{n\longrightarrow\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ y si $\lim_{n\longrightarrow\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es una estimación convergente de θ.

DEMOSTRACION

Tenemos la Desigualdad de Chebyshev:

$$P(\mid \hat{\theta} - \theta \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

Con el teorema anterior, se tiene inmediatamente que

TEOREMA

Sea X v.a. con esperanza μ y varianza σ^2. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral obtenido de una muestra de tamaño n. Entonces $\overline{X}$ es un estimador insesgado y convergente a μ.

Teorema de Consistencia

TEOREMA

Sea $\hat{\theta}$ una estimación de θ. Si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ y si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es una estimación convergente de θ.

DEMOSTRACION

Tenemos la Desigualdad de Chebyshev:

$$P(|\ \hat{\theta} - \theta\ | \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

Con el teorema anterior, se tiene inmediatamente que

TEOREMA

Sea X v.a. con esperanza μ y varianza σ^2. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral obtenido de una muestra de tamaño n. Entonces $\overline{X}$ es un estimador insesgado y convergente a μ.

Error Cuadrático Medio

Definición ERROR CUADRATICO MEDIO

Se define al **error cuadrático medio** de un estimador $\hat{\theta}$ de θ como

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right)$$

Notemos que

$$ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + Sesgo^2$$

donde

$$Sesgo = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Error Cuadrático Medio

Definición ERROR CUADRATICO MEDIO

Se define al **error cuadrático medio** de un estimador $\hat{\theta}$ de θ como

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right)$$

Notemos que

$$ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + Sesgo^2$$

donde

$$Sesgo = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Problema

P1

Sea $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ una muestra de X tal que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$

Mostrar que $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = (n-1)\cdot\sigma^2$

Esto genera que

$$\hat{\sigma}^2{}_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

es un estimador insesgado de σ^2

Se denota

$$\hat{\sigma}^2{}_{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

Problema

P1

Sea $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ una muestra de X tal que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$

Mostrar que $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = (n-1)\cdot\sigma^2$

Esto genera que

$$\hat{\sigma}^2{}_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

es un estimador insesgado de σ^2

Se denota

$$\hat{\sigma}^2{}_{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

Problema

P1

Sea $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ una muestra de X tal que $E(X)=\mu$ y $Var(X)=\sigma^2$

Mostrar que $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=(n-1)\cdot\sigma^2$

Esto genera que

$$\hat{\sigma}^2{}_{n-1}=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)$$

es un estimador insesgado de σ^2

Se denota

$$\hat{\sigma}^2{}_{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)$$

Problema

P2

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostrar que

$$\frac{(n-1)\cdot \hat{\sigma}^2{}_{n-1}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

HINT:

$$\sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Se puede probar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2{}_{n-1}$ son independientes.

Problema

P2

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostrar que

$$\frac{(n-1)\cdot \hat{\sigma}^2{}_{n-1}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

HINT:

$$\sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Se puede probar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2{}_{n-1}$ son independientes.

Problema

P2

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostrar que

$$\frac{(n-1)\cdot \hat{\sigma}^2{}_{n-1}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

HINT:

$$\sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Se puede probar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2{}_{n-1}$ son independientes.

Problema

P3

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostrar que

$$ECM(\hat{\sigma^2}_{n+1}) < ECM(\hat{\sigma^2}_{n}) < ECM(\hat{\sigma^2}_{n-1})$$

Métodos para encontrar Estimadores

Hasta ahora, tenemos algunas herramientas para determinar si un estimador dado cumple o no algunas "buenas" propiedades.

Necesitamos tener algunos métodos que nos permitan llegar a buenos estimadores.

Estimador de Máxima Verosimilitud

Definición ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

El estimador de máxima verosimilitud de θ, llamado $\hat{\theta}$, basado en una muestra $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ es el valor de θ que maximiza a $L(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n; \theta)$ considerado como una función de θ para la muestra dada. L está definida como

$$L(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n; \theta) = f(X_1; \theta) \cdot f(X_2; \theta) \cdot \ldots \cdot f(X_n; \theta)$$

Cómo llegar al EMV

Dedemos maximizar. Para ello, lo más intuitivo es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

Sin embargo, notemos que deberíamos derivar muchos productos!!! ¿Qué hacemos?

USAMOS ln

es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ln\ L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n; \theta) = 0$$

Cómo llegar al EMV

Dedemos maximizar. Para ello, lo más intuitivo es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

Sin embargo, notemos que deberíamos derivar muchos productos!!! ¿Qué hacemos?

USAMOS ln

es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ln\ L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n; \theta) = 0$$

Cómo llegar al EMV

Dedemos maximizar. Para ello, lo más intuitivo es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

Sin embargo, notemos que deberíamos derivar muchos productos!!! ¿Qué hacemos?

USAMOS ln

es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ln\ L(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n; \theta) = 0$$

Cómo llegar al EMV

Dedemos maximizar. Para ello, lo más intuitivo es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

Sin embargo, notemos que deberíamos derivar muchos productos!!! ¿Qué hacemos?

USAMOS ln

es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ln\ L(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n; \theta) = 0$$

Propiedades del EMV

- El EMV puede ser sesgado.
- Propiedad de Invarianza
  Es decir si $\hat{\theta}$ es el EMV de θ, entonces $g(\hat{\theta})$ es el EMV de $g(\theta)$

¿Qué pasa si L (función de verosimilitud) depende de más de un parámetro?

$$L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n; \alpha, \beta)$$

Simplemente tomamos ambas derivadas parciales y resolvemos un sistema.

Propiedades del EMV

- El EMV puede ser sesgado.
- Propiedad de Invarianza
  Es decir si $\hat{\theta}$ es el EMV de θ, entonces $g(\hat{\theta})$ es el EMV de $g(\theta)$

¿Qué pasa si L (función de verosimilitud) depende de más de un parámetro?

$$L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n; \alpha, \beta)$$

Simplemente tomamos ambas derivadas parciales y resolvemos un sistema.

Propiedades del EMV

- El EMV puede ser sesgado.
- Propiedad de Invarianza
  Es decir si $\hat{\theta}$ es el EMV de θ, entonces $g(\hat{\theta})$ es el EMV de $g(\theta)$

¿Qué pasa si L (función de verosimilitud) depende de más de un parámetro?

$$L(X_1,\ X_2, ...,\ X_n; \alpha, \beta)$$

Simplemente tomamos ambas derivadas parciales y resolvemos un sistema.

Problema

P4

Sea $X \sim Gamma(r,\alpha)$, y $X_1,\ X_2,...,\ X_n$ una muestra aleatoria.
a) Encontrar el EMV de r y α.
b) Asumiendo r conocido, encontrar el EMV de $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Estudiar insesgamiento y consistencia.
c) ¿Cuál es la distribución muestral de $\hat{\lambda}$?

Distribución Gamma

- Gamma $G(r,\alpha)$
  Sean $r,\ \alpha > 0$. Si $X \sim G(r,\alpha)$, se tiene

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r x^{r-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Problema

P4

Sea $X \sim Gamma(r, \alpha)$, y $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria.
a) Encontrar el EMV de r y α.
b) Asumiendo r conocido, encontrar el EMV de $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Estudiar insesgamiento y consistencia.
c) ¿Cuál es la distribución muestral de $\hat{\lambda}$?

Distribución Gamma

- Gamma $G(r, \alpha)$
  Sean $r,\ \alpha > 0$. Si $X \sim G(r, \alpha)$, se tiene

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r x^{r-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Problema

P5

a) Determinar el EMV de p de una Distribución Binomial.

b) Mostrar que no existe estimador insesgado de

$$\theta = \frac{p}{1-p}$$

Bibliografía

- Paul L. Meyer.
  Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.
- W. Mendenhall.
  Mathematical statistics with applications