Tarea 3 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.
Considere una v.a. X con distribución Beta de parámetros α,β ($X \to Be(\alpha, \beta)$)

1. Si $X \to Be(\alpha, \beta)$ calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.
2. Sean $Y_1 \to G(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \to G(\alpha_2, \beta)$ v.a. independientes. Muestre que: $U = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \to Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de $V = Y_1 + Y_2$.
3. Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \to Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un articulo del lote, ¿cual es la probabilidad que sea defectuoso?.

Pregunta 2.
La duración (en horas) de dos aparatos eléctricos son una v.a. (d_1, d_2) con distribución N(43, 36) y N(45, 9) respectivamente.

1. Si usted debe elegir uno de dichos aparatos, ¿cual escogería?
2. Si se instalan dos equipos (uno de cada tipo) de tal forma que uno de ellos funciona cuando el otro falla. Calcule la probabilidad que el sistema total dure mas de 80 hrs.
3. Si se elige solo equipos de tipo d_1 y se instalan de tal forma que el i-ésimo comienza a funcionar cuando el (i-1)-ésimo falla, determine cuantos equipos se deben instalar para que el sistema funcione mas de 750 hrs. con probabilidad 0,99. Asuma independencia en la falla de los equipos

Pregunta 3.
Se considera que el tiempo de reacción frente a un estimulo luminoso es una v.a. T distribuida normalmente con media 0,65 segundos. De acuerdo con los resultados de una investigación se estima que bajo el efecto de cierta dosis de alcohol, el tiempo de reacción frente al mismo estimulo puede expresarse como $T^* = 1,4T - 0,02$. Además, se indica que la probabilidad que individuo, que ha ingerido alcohol, reaccione antes de 1 segundo es de 0,9.

1. ¿Cual es la probabilidad que un sujeto que no ha ingerido alcohol reaccione antes de 0,7 segundos?
2. Si se escogen 10 sujetos en forma independiente que no han ingerido alcohol ¿cual es la probabilidad que a lo mas 2 reaccionen después de 0,7 segundos?

Pregunta 4.
Sean $X_1 \to N(\mu, \sigma^2)$, $X_2 \to N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere

$$Z(t) = X_1 cos(wt) + X_2 sen(wt) \quad V(t) = \frac{\partial Z(t)}{\partial t}$$

i) Determine la distribuci'on de Z(t) y V (t) (t fijo).
ii) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.

Pregunta 5.
Sean $X_i \to U(0,1)$, $i = 1, ..., n$, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.:

$$Y = -2 \cdot ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$$

¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(y > 60)$ si $n = 50$.

Pregunta 6.

a) Un embarque de televisores consta de 40 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 40 televisores defectuosos en los 40 lotes.

b) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H, M) que son v.a. tales que $H \to N(1{,}7; 0{,}1^2)$ y $M \to N(1{,}6; 0{,}05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta tener estatura inferior a 1.65, calcule la probabilidad de que sea mujer. ¿Cómo cambia su respuesta si se sabe que la estatura del individuo es igual a 1.65?

Pregunta 7.

El ingreso mensual de las personas X puede modelarse como una v.a. producto de muchas variables independientes entre sí, (como sexo, edad, eduación, etc.) es decir $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \ldots \cdot X_n$, con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Si n es un número grande, determine la densidad de X.

Pregunta 8.

La edad en una gran población de adultos es una v.a. normal de media 45 años y desviación estándar 9 años.

i) Si de la población se extraen n individuos obteniéndose por lo menos a uno menor a 50 años. Calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.

ii) Si se toman dos adultos, ¿Cuál es la probabilidad de que sus edades difieran en menos de 3 años?

Pregunta 9.

Sean X e Y los errores de medición de las coordenadas x e y al medir la posición de un objeto en el plano. Si $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ independientes. Determine, usando el T.C.V, la densidad de

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Nota: La distribución de R se conoce como la distribución de Rayleigh.

Pregunta 10.

La nota de los alumnos del curso MA3403 puede ser considerada como una v.a. normal de media μ y varianza σ^2. Si se sabe que se aprueba con nota igual o superior a 4,0, se reprueba con nota menor a 3,7 y se queda pendiente con nota entre 3,7 y 4,0:

i) Suponga que $\mu = 4,2$, $\sigma^2 = 0,8^2$ y 110 alumnos. Si se elige un grupo de 10 alumnos, sin reposición, calcule la probablidad que "a lo más dos de ellos estén reprobados y al menos 9 estén aprobados".

ii) Si del curso se eliminan los reprobados, ¿Cuál es la función de densidad de la nota de los restantes? Calcule su esperanza.

iii) Suponga que μ es desconocido y se escoge una muestra de alumnos de tamaño n (independiente). Determine n de tal forma que la media muestral $\overline{X}$ difiera de la media poblacional μ en menos de 0,5 con probabilidad 0,95.

Pregunta 11.

Sean X_1, $X_2, \ldots$ v.a. tal que

$$\mathbb{P}(X_n = e^n) = \frac{1}{n} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Muestre que $X_n \underset{\mathbb{P}}{\to} 0$ pero $\mathbb{E}(X_n^k) \to \infty \; \forall k > 0$

Pregunta 12.

Sean X, Y v.a. tales que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \theta$, $Var(X) = \sigma^2$, $Var(Y) = k \cdot \sigma^2$. Sean X_1, $X_2, \ldots, X_n$, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$ m.a. de X e Y respectivamente, y $\hat{\theta} = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\overline{Y}$. Determine α para que $\hat{\theta}$ sea un estimador insesgado y con varianza mínima.

Pregunta 13.

Un experimento de Bernoulli de parámetro p se repite hasta obtener r éxitos. Se X representa el número de repeticiones realizadas. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de p.

Muestre que $\frac{r-1}{x-1}$ es estimador insesgado de p $(r < 1)$

Pregunta 14.

Si X es una v.a. con distribución:
i) Pareto.
ii) Poisson
iii) Beta de parámetros $\alpha = \theta$ y $\beta = 1$
Determine el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros respectivos.
Analice sesgo, varianza y distribuciones muestrales cuando se pueda.

Pregunta 15.

Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple. Suponiendo que n es grande, determine un intervalo de confianza para λ con un nivel de confianza $1 - \alpha$.

Fecha de Entrega: Día Control 3.