PAUTA-Control 2 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.

a.- En cierto juego de lotería se sortea un premio de $\$G$ y cada boleto cuesta $\$C$. La probabilidad de ganar en un sorteo es p y usted está dispuesto a jugar "hasta que gane".

i) Determine la distribución de probabilidades de la variable U: Utilidad obtenida.
ii) Calcule la probabilidad que usted termine la operación con una utilidad no negativa.

SOLUCIÓN

i)
Notemos que

$$U = G - N \cdot C$$

donde N representa la cantidad de boletos comprados hasta que ganó. Es claro que el carácter aleatorio de U viene heredado por N, ya que ni G ni C son aleatorios.
Dado que

$$R_N = \mathbb{N}$$

se tiene

$$R_U = \{G - k \cdot C \,:\, k \in \mathbb{N}\}$$

Notemos además que

$$N \sim Geom(p)$$

es decir

$$\mathbb{P}(N = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

Además, se tiene

$$N = k \Longleftrightarrow -N \cdot C = -k \cdot C \Longleftrightarrow G - N \cdot C = G - k \cdot C$$

Así se tiene que

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(U = G - k \cdot C)$$

de este modo,

$$\mathbb{P}(U = m) = \mathbb{P}(N = \frac{G-m}{C}) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{\frac{G-m}{C}-1} & si\ \frac{G-m}{C} \in \mathbb{N} \\ 0 & si\, no \end{cases}$$

ii)
Se tiene

$$\mathbb{P}(U \quad \geq \quad 0) = \mathbb{P}(G - N \cdot C \geq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{G}{C} \geq N\right)$$

pero

$$N \sim Geom(p)$$

luego

$$\mathbb{P}(N \leq \frac{G}{C}) = \mathbb{P}\left(N \leq \left\lfloor \frac{G}{C} \right\rfloor\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{G}{C} \rfloor} p(1-p)^{i-1}$$

b.- Sea X variable aleatoria discreta tal que $R_X \subseteq \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades de X como:

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

i) Calcule $\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}$ evaluada en $z = 0$.
ii) Calcule $G_X(z)$ si $X \sim Poisson(\lambda)$

SOLUCIÓN

i)
Podemos escribir

$$G_X(z) = \mathbb{P}(X = 0) + z \cdot \mathbb{P}(X = 1) + z^2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + z^3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + ... + z^n \cdot \mathbb{P}(X = n) + ...$$

calculemos las primeras derivadas para poder planear algún tipo de ecuación.

$$\frac{dG_X(z)}{dz} = \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot z \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3z^2 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + ... + nz^{n-1} \cdot \mathbb{P}(X = n) + ...$$

$$\frac{d^2G_X(z)}{dz^2} = 2\mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot 2 \cdot z \cdot \mathbb{P}(X = 3) + ... + n(n-1)z^{n-2} \cdot \mathbb{P}(X = n) + ...$$

$$\frac{d^3G_X(z)}{dz^3} = 3 \cdot 2\mathbb{P}(X = 3) + ... + n(n-1)(n-2)z^{n-3} \cdot \mathbb{P}(X = n) + ...$$

luego, es fácil intuir que

$$\boxed{\left. \frac{d^nG_X(z)}{dz^n} \right|_{z=0} = n! \cdot \mathbb{P}(X = n)}$$

la demostración formal, pasa por ver que

$$\frac{d^nG_X(z)}{dz^n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n} \mathbb{P}(Z = k)$$

ii)
Sabemos que si $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

luego

$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(z\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{z\lambda}
\end{aligned}$$

es decir

$$G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

c.- Suponga que la función de densidad conjunta de X e Y está dado por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & si\, no \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y)$

SOLUCIÓN

para el cálculo pedido, se necesita usar $f_{X|Y}(x \mid y)$, pero sabemos que

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X\,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

ahora bien

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{X\,Y}(x,y)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx \\ &= \frac{e^{-y}}{y}\int_0^\infty e^{-x/y}dx \\ &= e^{-y} \end{aligned}$$

con esto

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{e^{-x/y}}{y}$$

luego

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y) = \int_1^\infty \frac{e^{-x/y}}{y}dx$$

se tiene que

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y) = e^{-1/y}$$

Pregunta 2.

a.- Sean X e Y variables aleatorias independientes. Muestre que:

$$Var(X \cdot Y) = Var(X) \cdot Var(Y) + Var(X) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 + Var(Y) \cdot \mathbb{E}(X)^2$$

SOLUCIÓN

Desarrollemos el lado derecho:
Se tiene

$$\begin{aligned} Var(X) \cdot Var(Y) &= \left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right) \cdot \left(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(X)^2 \cdot \mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(X)^2 \cdot \mathbb{E}(Y)^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, como X e Y son independientes, entonces X^2 e Y^2 son independientes.
Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X \cdot Y) \\ \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}(X^2 \cdot Y^2) = \mathbb{E}((X \cdot Y)^2) \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$Var(X) \cdot Var(Y) = \mathbb{E}(X^2 \cdot Y^2) - \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(X)^2 \cdot \mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(X \cdot Y)^2$$

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned} Var(X) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 &= \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(X)^2 \cdot \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(X \cdot Y)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(Y) \cdot \mathbb{E}(X)^2 &= \mathbb{E}(Y^2) \cdot \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 \cdot \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(Y^2) \cdot \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X \cdot Y)^2 \end{aligned}$$

sumando, queda

$$\begin{aligned} Var(X) \cdot Var(Y) + Var(X) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 + Var(Y) \cdot \mathbb{E}(X)^2 &= \mathbb{E}((X \cdot Y)^2) - \mathbb{E}(X \cdot Y)^2 \\ &= Var(X \cdot Y) \end{aligned}$$

luego, hemos probado lo que se quería.

b.- Paula y Pedro quieren cortar una pieza rectangular de un papel. Como ellos son probabilistas deciden determinar la forma exacta de su rectángulo usando la realización de una variable aleatoria positiva U. Pedro, como es flojo, considera una única realización de su v.a. y por lo tanto corta un cuadrado de lados igual al valor que tomó U. Mientras que Paula consideró dos realizaciones independientes de U, una para el largo y otra para el ancho de su rectángulo. Calcule las esperánzas de las áreas de los rectángulos y indique cuál es la mayor.

SOLUCIÓN

Pedro toma la variable aleatoria U y a partír de esa variable aleatoria, construye un cuadrado, de modo que las variables aleatorias que representan el área y el perímetro de la figura generada por pedro son:

$$\begin{aligned} A_{PEDRO} &= U^2 \\ P_{PEDRO} &= 4 \cdot U \end{aligned}$$

De modo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(A_{PEDRO}\right) &= \mathbb{E}(U^2) \\ \mathbb{E}\left(P_{PEDRO}\right) &= \mathbb{E}(4 \cdot U) = 4 \cdot \mathbb{E}(U) \end{aligned}$$

Por otra parte, Paula toma dos variables aleatoria X e Y, independientes entre sí, pero con la misma distribución que U (v.a. tomada por Pedro). Ahora bien, las variables aleatorias que representan el área y el perímetro del rectángulo generado por Paula son:

$$\begin{aligned} A_{PAULA} &= X \cdot Y \\ P_{PAULA} &= 2 \cdot (X + Y) \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(A_{PAULA}\right) &= \mathbb{E}(X \cdot Y) \\ \mathbb{E}\left(P_{PAULA}\right) &= \mathbb{E}(2 \cdot (X + Y)) = 2 \cdot (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) \end{aligned}$$

Ahora, como X e Y son independientes, entonces

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Pero como X, Y y U tienen la misma distribución, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(U)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(A_{PAULA}\right) &= \mathbb{E}(U)^2 \\ \mathbb{E}\left(P_{PAULA}\right) &= 4 \cdot \mathbb{E}(U) \end{aligned}$$

De modo que

$$\mathbb{E}(P_{PEDRO}) = \mathbb{E}(P_{PAULA})$$

Para comparar las áreas, notemos que

$$\mathbb{E}(A_{PEDRO}) - \mathbb{E}(A_{PAULA}) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = Var(U) \geq 0$$

luego

$$\mathbb{E}(A_{PEDRO}) \geq \mathbb{E}(A_{PAULA})$$

c.- En un juego usted gana un partido con probabilidad p. Cuando usted gana, su capital se duplica y cuando pierde se reduce a la mitad. Si comienza con $C\,(UM)$ de capital y juega n partidos. Calcule la esperanza de la utilidad.

SOLUCIÓN

Si se define las variables aleatorias independientes

$$X_i = \begin{cases} 2 & con\, probabilidad\, p \\ \frac{1}{2} & con\, probabilidad\, 1-p \end{cases}$$

se tiene que la si, se juegan n partidos, entonces la utilidad queda expresada como:

$$U = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot C$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot C\right) \\ &= C \cdot \ \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \end{aligned}$$

esto último por ser C constante.
Por otra parte, las variables X_i son independientes, entonces se tiene:

$$\mathbb{E}(U) = C \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)\right)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &= 2 \cdot p + \frac{1}{2}(1-p) \\ &= \frac{3}{2}p + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{E}(U) = C \cdot \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right)^n$$

Pregunta 3.

a.- Sean X, Y variables aleatorias independientes tal que $X \sim exp(\alpha)$ y $Y \sim exp(\beta)$.

i) Calcule $\mathbb{P}(X > Y)$

ii) Sean $Z = X + Y$, $W = \frac{X}{X+Y}$, $\alpha = \beta$. Usando el T.C.V. determine

$$f_{Z\,W}(z,w),\ f_Z(z),\ f_W(w)$$

SOLUCIÓN

i)

Considerando que si $X \sim exp(\alpha)$, entonces $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ si $x > 0$, entonces se tiene que por ser X e $\underline{Y}$ independientes_

$$\begin{aligned} f_{X\,Y}(x,y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ &= \alpha\beta \cdot e^{-\alpha x - \beta y} \end{aligned}$$

ahora bien

$$\mathbb{P}(X \quad > \quad Y) = \int_0^{\infty}\int_0^{x} f_{X\,Y}(x,y)dydx$$

pero

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\int_0^{x} f_{X\,Y}(x,y)dydx &= \int_0^{\infty}\int_0^{x} \alpha\beta \cdot e^{-\alpha x - \beta y}dydx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha x} \int_0^{x} \beta e^{-\beta y}dydx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha x}\left[1 - e^{-\beta x}\right]dx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha x}dx - \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha x}e^{-\beta x}dx \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

ii)

Se toma $\alpha = \beta$

Se tiene $Z = X + Y$ y $W = \frac{X}{X+Y}$, el teorema de cambio de variables dice:

$$f_{Z\,W}(z,w) = f_{X\,Y}(x,y) \cdot \left| det\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}\right)\right|^{-1}$$

donde

$$\Psi(x,y) = \left(x + y,\ \frac{x}{x+y}\right)$$

Primero, notemos que

$$f_{X\,Y}(x,y) = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha(x+y)} = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha z}$$

por otra parte

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

así, se tiene

$$det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)=\frac{-x-y}{(x+y)^2}=\frac{-1}{x+y}$$

$$\left|det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)\right|=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{z}$$

así, se tiene

$$\boxed{f_{Z\,W}(z,w)=\begin{cases}\alpha^2\cdot z\cdot e^{-\alpha z}\cdot & si\,z>0\,w\in(0,1)\\ 0 & si\,no\end{cases}}$$

Notemos que

$$R_Z=\mathbb{R}^+\ \ y\ \ R_W=(0,1)$$

Así,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^1 \alpha^2\cdot e^{-\alpha z}\cdot z dw\\ &= \alpha^2\cdot e^{-\alpha z}\cdot z\int_0^1 dw\\ &= \alpha^2\cdot e^{-\alpha z}\cdot z \end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}\alpha^2\cdot e^{-\alpha z}\cdot z & si\,z>0\\ 0 & si\,no\end{cases}}$$

aceptando que $f_Z(z)$ es función de densidad, entonces

$$\int_0^\infty f_Z(z)dz=1$$

pero

$$f_{Z\,W}(z,w)=f_Z(z)$$

luego

$$f_W(w)=\int_0^\infty f_{Z\,W}(z,w)dz=\int_0^\infty f_Z(z)dz=1$$

así se tiene que

$$\boxed{W\sim Uniforme(0,1)}$$

Notemos que Z y W son independientes, pues

$$f_{Z\,W}(z,w)=f_Z(z)\cdot f_W(w)$$

b.- Sean X_1, $X_2, ...$ variables aleatorias iid, y sea N una variable aleatoria a valores enteros no negativos, e independiente de $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Sea

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Muestre que

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$$

SOLUCIÓN

Es claro que

$$\mathbb{E}(S \mid N) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i)$$

pero como todas las variables aleatorias tienen la misma distribución, entonces se tiene

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_j) \ \ \forall i, j$$

en particular se tiene

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_i)$$

luego

$$\mathbb{E}(S \mid N) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_1) = N \cdot \mathbb{E}(X_1)$$

por último, se sabe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(S \mid N)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(N \cdot \mathbb{E}(X_1)\right) \end{aligned}$$

pero $\mathbb{E}(X_1)$ es un valor numérico, luego

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$$