

## Control 2 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema  
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

### Pregunta 1.

a.- En cierto juego de lotería se sortea un premio de  $\$G$  y cada boleto cuesta  $\$C$ . La probabilidad de ganar en un sorteo es  $p$  y usted está dispuesto a jugar "hasta que gane".

- i) Determine la distribución de probabilidades de la variable  $U$ : Utilidad obtenida.
- ii) Calcule la probabilidad que usted termine la operación con una utilidad no negativa.

b.- Sea  $X$  variable aleatoria discreta tal que  $R_X \subseteq \mathbb{N}$ . Se define la función generadora de probabilidades de  $X$  como:

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

- i) Calcule  $\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}$  evaluada en  $z = 0$ .
- ii) Calcule  $G_X(z)$  si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

c.- Suponga que la función de densidad conjunta de  $X$  e  $Y$  está dado por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Calcule  $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y)$

### Pregunta 2.

a.- Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes. Muestre que:

$$\text{Var}(X \cdot Y) = \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y) + \text{Var}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)^2 + \text{Var}(Y) \cdot \mathbb{E}(X)^2$$

b.- Paula y Pedro quieren cortar una pieza rectangular de un papel. Como ellos son probabilistas deciden determinar la forma exacta de su rectángulo usando la realización de una variable aleatoria positiva  $U$ . Pedro, como es flojo, considera una única realización de su v.a. y por lo tanto corta un cuadrado de lados igual al valor que tomó  $U$ . Mientras que Paula consideró dos realizaciones independientes de  $U$ , una para el largo y otra para el ancho de su rectángulo. Calcule las esperanzas de las áreas de los rectángulos y indique cuál es la mayor.

c.- En un juego usted gana un partido con probabilidad  $p$ . Cuando usted gana, su capital se duplica y cuando pierde se reduce a la mitad. Si comienza con  $C$  (UM) de capital y juega  $n$  partidos. Calcule la esperanza de la utilidad.

**Pregunta 3.**

a.- Sean  $X, Y$  variables aleatorias independientes tal que  $X \sim \text{exp}(\alpha)$  y  $Y \sim \text{exp}(\beta)$ .

i) Calcule  $\mathbb{P}(X > Y)$

ii) Sean  $Z = X + Y$ ,  $W = \frac{X}{X+Y}$ ,  $\alpha = \beta$ . Usando el T.C.V. determine

$$f_{ZW}(z, w), f_Z(z), f_W(w)$$

b.- Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias iid, y sea  $N$  una variable aleatoria a valores enteros no negativos, e independiente de  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Sea

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Muestre que

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$$

**Tiempo: 3 horas.**