Auxiliar N°7. Esperanza de Variables Aleatorias

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Primavera 2009
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

RESUMEN.

Esperanza
Sea X v.a., se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} x_i \cdot p_i & \textit{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x) dx & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades

(1) Si $X = \alpha$, entonces $\mathbb{E}(X) = \alpha$,

(2) Si X, Y son variables aleatorias, entonces $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$

(3) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$

(4) Si X v.a. y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \textit{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x) dx & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

(5) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Varianza

Si X es una variable aleatoria, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Propiedades

(1) Si $X = \alpha$, entonces $Var(X) = 0$,

(2) $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$.

(3) Si X e Y son independientes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Covarianza y Correlación.

Sean X e Y dos variables aleatorias, se define covarianza y correlación respectivamente:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

Propiedades

(1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

(2) $Cov(X + \alpha Y,\, Z) = Cov(X,\, Z) + \alpha \cdot Cov(Y,\, Z)$

(3) Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$

Esperanza Condicional.

Sean X e Y dos variables aleatorias, se define

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y) & \textit{caso discreto} \\ \int x \cdot f_{X|Y}(x \mid y) dx & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

Observación

$\mathbb{E}(X \mid Y)$ es una variable aleatoria (función de Y)

Propiedad

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid Y)\right) = \mathbb{E}(X)$$

EJERCICIOS.

1.- Paseo Aletorio. (Referencia Clase Auxiliar 4)
Se tiene una partícula en el conjunto $\mathbb{Z}$ ubicada en el 0, la partícula se mueve por turnos hacia la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $1 - p$. Sea X la variable aleatoria que indica la posición de la partícula después de n turnos. Calcule $\mathbb{E}(X)$.

2.- Problema de la Barra. (Referencia Clase Auxiliar 6)
Se tiene una barra de largo L a la cual se le quieren hacer dos cortes al azar. Sea $X \sim U(0, L)$, la v.a. que representa el lugar del primer corte, e $Y \sim U(x, L)$, v.a. que representa el lugar del segundo corte entre el primero y el extremo L de la barra. Calcule $\mathbb{E}(Y)$.

3.- Un fabricante produce cierto tipo de aceite lubricante que pierde alguno de sus atributos especiales si no se usa dentro de cierto período de tiempo. Sea X el número de unidades de aceite pedidas al fabricante durante cada año(una unidad es igual a 1000 galones). Supongamos que X es una variable aleatoria continua, uniforme en $[2, 4]$. Supongamos que por cada unidad vendida se obtiene una utilidad de \$300, mientras que cada unidad no vendida (durante un año determinado) produce una pérdida de \$100.
El fabricante debe decidir pocos meses antes del comienzo de cada año cuánto producirá, y que decide fabricar Y unidades. ¿Cuál es el valor de Y que maximiza la utilidad esperada?

4.- Sea la variable aleatoria bidimensional $(X,\, Y)$ que está uniformemente en la región triangular

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 1\}$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Cov(X,Y)$, $\rho(X,\, Y)$.

5.- Sea X una variable aleatoria cuyo recorrido es un conjunto finito y cuya distribución es uniforme (equiprobable). Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.