

## Tarea 2 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema

Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

### Pregunta 1.

Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de Pareto de parámetros  $X_0, \alpha$  ( $X_0 > 0, \alpha > 0$ ) si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

1. Calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $Var(X)$ .
2. Si  $Y = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)$ , determine la densidad de  $Y$
3. Considere que  $X$  representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con  $X_0 = 200$  y  $\alpha = 2$ . Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.
4. Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10% mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.

### Pregunta 2.

La duración  $T$  (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro  $\lambda$ . La máquina tiene costos de funcionamiento de  $C_1$  (UM) por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de  $C_2$  (UM) por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobra  $C_3$  UM por hora y que exige ser contratado por un número prefijado de horas ( $H$ ). El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.

1. Sea  $U$  la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee  $U$  en función de los datos entregados.
2. Determine  $H$  de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
3. Suponga que  $\lambda = 0,01$ ,  $C_1 = 6$ ,  $C_2 = 20$ ,  $C_3 = 4$  y que  $H = 60$  (no es el óptimo de b). Determine la distribución de probabilidades de la v.a.  $U$ .

### Pregunta 3.

a) Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0,9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

b) Al revisar un lote de 10 motores este es totalmente rechazado o es vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos uno es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75 [UM] y se vende a 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor.

### Pregunta 4.

Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad  $p$ . Cuando gana, su capital se dobla y cuando pierde, su capital se reduce a la mitad. Si comienza con  $C$ [UM] de capital y juega  $n$  partidos independientes. Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Utilidad. Calcule su esperanza.

### Pregunta 5.

Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia  $L_1$  una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo  $L_2$  que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en  $L_1 = L$  y  $L_2 = \frac{L}{2}$ .

**Pregunta 6.**

Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad  $X$  (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad  $Y$  (en miles de pesos). Las variables  $X$  e  $Y$  tienen una densidad conjunta :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & \text{si } 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

1. Determine la función densidad de la variable ganancia por vehículo ( $G$ ).
2. Considere ahora solo la variable  $Y$  (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{72} & \text{si } 0 < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Debido a las condiciones económicas imperantes, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. El ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta está entre 0 y 2000 un 1% en vales de bencina. Si el precio esta entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es \$40. Para el resto entrega una radio de valor \$100. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil. Calcule su esperanza.

**Pregunta 7.**

La fuerza magnética  $H$  en un punto  $P$  ubicado a  $X$  unidades de un cable con corriente  $I$ , queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

1. Si  $P$  es un punto variable con  $X$  e  $I$ , suponiendo que  $X$  se distribuye uniforme en el intervalo  $(2, 4)$  e  $I$  uniforme en el intervalo  $(10, 20)$  (ambas variables independientes) calcule la función densidad de  $H$ .
2. Calcule la  $\mathbb{P}(H > 10/X < 3)$ .

**Pregunta 8.**

Sea  $X$  una v.a. cualquiera. Determine  $d$  tal que minimice:

1.  $E((X - d)^2)$ ; denominado error cuadrático medio.
2.  $E(|X - d|)$ ; denominado error absoluto medio

**Pregunta 9.**

De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector  $(X, Y)$  como  $X$ : N° de monos obtenidos.  $Y$  : N° de ases obtenidos.

1. Determine la distribución de probabilidades  $(X, Y)$
2. Determine las distribuciones marginales de  $X$  e  $Y$  . Calcule la  $\mathbb{E}(X)$  y  $\mathbb{E}(Y)$ .
3. Determine la distribución condicional de  $X$  dado  $Y = y \forall y \in R_y$  y la distribución condicional de  $Y$  dado  $X = x \forall x \in R_x$ .
4. Determine la distribución de probabilidades de las variables  $M = H(X, Y) = \text{Max}(X, Y)$ ;  $N = G(X, Y) = \text{Min}(X, Y)$ .

**Pregunta 10.**

Demuestre que si  $X$  es una variable aleatoria que toma valores no negativos entonces

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

**Pregunta 11.**

En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos  $k$  impactos ¿Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan  $n$  bombas?

Si  $k = 1$ , determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad 0,99.

**Pregunta 12.**

Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución  $exp(\lambda)$ , es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en  $t = 0$ , pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en  $t = t_1$ , de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna  $t_1$  horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en  $t_2$  (hora en que se va) este bueno le asigna  $t_2$  horas.

1. Determine la distribución de  $Y$ : duración informada por el operario. Calcule  $\mathbb{E}(Y)$ .
2. Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de  $Z$ : duración informada por el operario.
3. Si  $Y$  se distribuye con una exponencial de parámetro  $\alpha$  independiente de  $X$ , calcule  $\mathbb{P}(Y > kX) \forall k$
4. Determine la densidad de  $Z = X + Y$ .

**Pregunta 13.**

Sean  $X, Y$  v.a. discretas, independientes.

- a) Si  $X \sim Geom(p)$  e  $Y \sim Geom(p)$ , calcule  $\mathbb{P}(X = m | X + Y = n)$  Hint: Calcule  $\mathbb{P}(X + Y = j) \forall j$ .
- b) Si  $X \sim B(n, p)$  e  $Y \sim B(m, p)$ , calcule  $\mathbb{P}(X = j | X + Y = k)$  Hint:  $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$

**Pregunta 14.**

Sea  $X \sim exp(\alpha)$ , es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Muestre que

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \iff X \sim exp(\alpha)$$

**Pregunta 15.**

a) Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con  $R_X = \mathbb{N}$ . Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

b) Sea  $X$  una variable aleatoria continua con  $R_X = \mathbb{R}^+$ . Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$