Control 1 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.

a.- Se escoge una carta de un mazo corriente. Sean A, B dos eventos asociados al espacio muestra de este experimento. Indique A, B para que sean:

i) Excluyentes, pero no independientes.

SOLUCIÓN
basta tomar $A \neq \emptyset$ y $A^C \neq \emptyset$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$.
en efecto. $A \cap A^C = \emptyset$ y $\mathbb{P}(A \cap A^C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, pero $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A^C) \neq 0$, es decir, los eventos no son independientes.

ii) Independientes, pero no excluyentes.

SOLUCIÓN
basta tomar el espacio entero y otro evento cualquiera $A \neq \emptyset$.
en efecto. $\Omega \cap A = A \neq \emptyset$, es decir, no son excluyentes, y por otra parte $\mathbb{P}(\Omega \cap A) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(A)$, ya que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

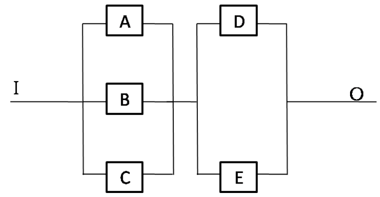
iii) Independientes y excluyentes.

SOLUCIÓN
Ne necesita que los eventos A y B cumplan con lo siguiente $A \cap B = \emptyset$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Con esto, se debe cumplir que $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, es decir $\mathbb{P}(A) = 0$ o bien $\mathbb{P}(B) = 0$, basta entonces tomar $A = \emptyset$ y B cualquier evento.

iv) No independientes y no excluyentes.

SOLUCIÓN
Basta tomar $A \neq \emptyset$ y $B \supseteq A$, tales que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ y $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.
en efecto, $A \cap B = A \neq \emptyset$, es decir, no son excluyentes, y además, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, si $\mathbb{P}(B) < 1$.

b.- Considere que en el circuito de la figura las componente A, B, C, D, E funcionan con probabilidad p y en forma independiente. Calcule la probabilidad de haya paso de I a O.



SOLUCIÓN.

El circuito puede ser dividido en dos, la Componente 1, que contiene a A, B y C, y la Componente 2, que contiene a D y E.

Para que haya paso de I a O, debe haber paso por la Componente 1 y por la Componente 2.

Se define $C1$ como el evento que indica que hay paso de corriente por la Componente 1. De manera análoga se define $C2$.

Luego, lo que se pide calcular, es

$$\mathbb{P}(C1 \cap C2)$$

En este caso, se recurrirá al complemento. Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C1 \cap C2) &= 1 - \mathbb{P}\left((C1 \cap C2)^C\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(C1^C \cup C2^C) \end{aligned}$$

pero es sabido que

$$\mathbb{P}(C1^C \cup C2^C) = \mathbb{P}(C1^C) + \mathbb{P}(C2^C) - \mathbb{P}(C1^C \cap C2^C)$$

Calcular $\mathbb{P}(C1^C)$ es calcular la probabilidad de que no haya paso por la Componente 1, y para que ello ocurra, se necesita que las componente A, B y C fallen al mismo tiempo. Y como probabilidad que cada uno componente funcione es p, entonces la probabilidad de que falle es $(1-p)$, y luego, por independencia, se tiene que

$$\mathbb{P}(C1^C) = (1-p)^3$$

De manera análoga se concluye que

$$\mathbb{P}(C2^C) = (1-p)^2$$

Además, para que no haya pasa por la Componente 1 ni por la Componente 2, todas las componentes debe estar falladas. luego

$$\mathbb{P}(C1^C \cap C2^C) = (1-p)^5$$

Así se tiene que

$$\mathbb{P}(C1^C \cup C2^C) = (1-p)^3 + (1-p)^2 - (1-p)^5$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C1 \cap C2) &= 1 - \left[(1-p)^3 + (1-p)^2 - (1-p)^5\right] \\ &= 1 - (1-p)^3 - (1-p)^2 + (1-p)^5 \end{aligned}$$

c.- Sea $A_1, ..., A_n$ eventos cualesquiera. Se definen $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1^C \cap A_2$, $B_3 = A_1^C \cap A_2^C \cap A_3$, etc. Demuestre que

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$$

SOLUCIÓN

Notemos que

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$$

Demostrémoslo por inducción.
para $n = 1$, es trivial, ya que, por definición $A_1 = B_1$.
Demostremos la implicación inductiva.
Se tiene que

$$\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup B_{n+1} &= A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \left(A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C \cap A_{n+1}\right) \\
&= \left[A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}\right] \cup A_n \cup \left(A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C \cap A_{n+1}\right) \\
&= \left[A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{n-1}^C\right]^C \cup \left(A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C \cap A_{n+1}\right) \cup A_n \\
&= \Bigg[\left(\left[A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{n-1}^C\right]^C \cup \left[A_1^C \cap A_2^C \cap ... A_{n-1}^C\right]\right) \\
&\quad \cap \left(\left[A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{n-1}^C\right]^C \cup \left[A_n^C \cap A_{n+1}\right]\right)\Bigg] \cup A_n \\
&= \left[\Omega \cap \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup \left[A_n^C \cap A_{n+1}\right]\right)\right] \cup A_n \\
&= A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup \left(\left[A_n^C \cap A_{n+1}\right] \cup A_n\right) \\
&= A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup \left(\left[A_n^C \cup A_n\right] \cap \left[A_{n+1} \cup A_n\right]\right) \\
&= A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup \left(\Omega \cap \left[A_{n+1} \cup A_n\right]\right) \\
&= A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup A_{n+1}
\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup B_{n+1} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup A_{n+1}$$

Pero por Hipótesis de Inducción, se concluye que

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n \cup A_{n+1} = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n-1} \cup B_n \cup B_{n+1}$$

Por otra parte, nótese que

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

En efecto.
sin pérdida de generalidad, supongamos $i < j$
se tiene

$$\begin{aligned}
B_i &= A_1^C \cap ... \cap A_{i-1}^C \cap A_i \\
B_j &= A_1^C \cap ... \cap A_{i-1}^C \cap A_i^C \cap ... \cap A_{j-1}^C \cap A_j
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
B_i \cap B_j &= A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{i-1}^C \cap A_i \cap A_i^C \cap ... \cap A_{j-1}^C \cap A_j \\
&= A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{i-1}^C \cap (A_i \cap A_i^C) \cap ... \cap A_{j-1}^C \cap A_j \\
&= A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_{i-1}^C \cap \emptyset \cap ... \cap A_{j-1}^C \cap A_j \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

De esta manera, se tiene que la unión de la familia B_i es disjunta. Luego, se tiene, que la probabilidad de la unión es suma de probabilidades. Se concluye que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n\right) &= \mathbb{P}\left(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n-1} \cup B_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}$$

Pregunta 2.

a.- Considere el conjunto $\Omega = \{1, 2, ..., 1000\}$ equiprobable. Se dice que un número es coprimo con otro si sólo si no tienen divisores comunes excepto el uno. ¿Cuál es la probabilidad que al elegir un número de Ω éste sea coprimo con 6?

SOLUCIÓN

Dado que $6 = 2 \cdot 3$, un número va a ser coprimo con 6 si NO es divisible ni por 2 ni por 3. En este caso, es mejor, calcular la probabilidad del complemento.

Sea A el evento que indica que se eligió un número coprimo con 6.

luego

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C)$$

Para que un número no sea coprimo con 6, este debe o bien ser divisible por 2 o bien por 3.

Definamos el evento $D2$, como aquel que indica que se extrajo un número divisible por 2. De manera análoga se define $D3$.

Luego

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(D2 \cup D3) = \mathbb{P}(D2) + \mathbb{P}(D3) - \mathbb{P}(D2 \cap D3)$$

Notemos que el evento $D2 \cap D3$, es igual al evento que indica que se extrae un número divisible por 6.

Dado que $\Omega = \{1, ..., 1000\}$, se tiene:

$$\mathbb{P}(D2) = \frac{500}{1000}$$

$$\mathbb{P}(D3) = \frac{333}{1000}$$

$$\mathbb{P}(D2 \cap D3) = \frac{166}{1000}$$

Luego

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{500}{1000} + \frac{333}{1000} - \frac{166}{1000} = \frac{667}{1000}$$

Entonces

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{667}{1000} = \frac{333}{1000}$$

b.- En una pastelería se vende 5 tipos de pasteles y usted necesita llevar 4 pasteles.

i) ¿De cuántas maneras se puede realizar su pedido?

SOLUCIÓN

Todo pedido se puede asignar a uno y sólo uno de los siguientes grupos:

1. Todos los pasteles iguales.
2. 3 pasteles iguales y uno distinto.
3. 2 pasteles iguales y 2 pasteles iguales (distintos a los otros).
4. 2 pasteles iguales y 2 pasteles distintos (entre sí y distintos a los primeros).
5. Todods los pasteles distintos.

Lo fundamental para el conteo, es tener en cuenta que el orden en que se hace el pedido es redundante, es decir, no debe ser considerado.

Otra observación importante es el hecho que los grupos recién definido generan una partición del espacio muestral.

De este modo, lo único que hay que hacer es contar los elementos de cada grupo.

El GRUPO 1, claramente tiene 5 elementos.

Sea T={a, b, c, d, e}. Este conjunto de alguna manera representa los tipos de pasteles.

El GRUPO 2, tiene $\binom{5}{2} \cdot 2$ elementos. Esto es, pues por cada subconjunto de tamaño 2 de T, por ejemplo {a, e}, se puede generar dos pedidos del GRUPO 2, tres pasteles del tipo a y uno del tipo e, o bien, tres pasteles del tipo e y uno del tipo a.

El GRUPO 3, tiene $\binom{5}{2}$ elementos. Esto es por un argumento similar al anterior.

El GRUPO 4 tiene $\binom{5}{3} \cdot 3$ elemetos. Esto es, ya que por cada subconjunto de tamaño 3 de T, por ejemplo {a,b,c}, se pueden generar 3 pedidos de este tipo, 2 a, 1 b y 1c; o bien 1a, 2b y 1c, o bien, 1a, 1 b y 2 c.

Y finalmente el GRUPO 5 tiene $\binom{5}{4}$ elementos.

Así, la cantidad total de pedidos posibles es:

$$5 + 2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + 3 \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$$

ii) Si el pastelero forma su pedido asignando los 4 pasteles al azar. Calcule la probabilidad que lleve pasteles distintos. Explicite el espacio muestral.

SOLUCIÓN

Para este experimento, el espacio muestral es

$$\Omega = \{(x_1,\ x_2,\ x_3, x_4)\ :\ x_i \in \{a, b, c, d, e\}\}$$

Hay que observar que las componentes de la tupla pueden ser iguales.

Es claro que $\mid \Omega \mid = 5^4$

Por otra parte, los casos favorables son $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, así, la probabilidad pedida es:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5^4} = \frac{24}{125}$$

c.- Un grupo de alumnos del curso está formado por dos hombres (H_1 y H_2) y dos mujeres (M_1 y M_2).

i) La tarea consta de 12 problemas y estos se asignan al azar (3 por persona). ¿De cuántas maneras se puede repartir los problemas?

SOLUCIÓN

Dado que el orden en que se realiza la repartición da igual, sino que lo importante es con qué preguntas se queda cada persona, la cantidad de reparticiones posibles son:

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$$

En efecto, supongamos que la primera persona que se le entregan las tareas al azar es H_1. A él se le puede asignar de $\binom{12}{3}$ formas las 3 preguntas.

Una vez asigna dichas preguntas, se debe entregar las 3 preguntas a H_2, el cual puede tomar de $\binom{9}{3}$ formas las preguntas (ya que H_1 ya tiene 3 preguntas). Ahora, hay que asignar preguntas a M_1, quien tiene $\binom{6}{3}$ formas de elegir preguntas, y como sobran 3 preguntas, esas son asignadas a M_2.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que a H_1 le corresponda hacer problemas consecutivos?

SOLUCIÓN

H_1 puede tomar sus 3 preguntas de $\binom{12}{3}$ maneras. Estos serías los casos totales.

Dado que para este caso, el espacio muestral son todos los subconjuntos de las preguntas de tamaño 3, los casos favorables serían:

$$\{1,2,3\}; \{2,3,4\}; ...; \{10,11,12\}$$

Que son 10 casos.

Así, la probabilidad pedida es:

$$\frac{10}{\binom{12}{3}}$$

iii) ¿Cuál es la probabilidad que a todos les corresponda hacer problemas consecutivos? Explicite el espacio muestral.

SOLUCIÓN

Dado el problema, el espacio muestral sería de la siguiente forma:

$$\Omega = \{(\{x_{i_1},\ x_{i_2},\ x_{i_3}\}, \{x_{i_4},\ x_{i_5},\ x_{i_6}\}, \{x_{i_7},\ x_{i_8},\ x_{i_9}\}, \{x_{i_{10}},\ x_{i_{11}},\ x_{i_{12}}\})\ :\ i_n \neq i_m\, si\, m \neq n\}$$

donde i_n es un número de $\{1, 2, ..., 12\}$, y x_q representa la pregunta q

En la parte i), se calculó $\mid \Omega \mid$.

Por lo que, lo único que queda es contar las casos favorables.

Claramente, para que todos tengan preguntas consecutivas, la única salida es que las preguntas asignadas a una persona sean: {1,2,3}, o bien, {4,5,6}, o bien, {7,8,9}, o bien, {10,11,12}.

Se tiene entonces, 4 opciones, considerando las permutaciones, entonces, se tiene 4! formas de repartir las preguntas consecutivas.

Así, la probabilidad pedida es:

$$\frac{4!}{\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}}$$

Pregunta 3.

a.- Se lanza un dado perfecto y J denota el resultado obtenido. Se tira tres veces una moneda tal que $\mathbb{P}(cara) = \frac{J}{6}$.

i) Calcule la probabilidad que $J = 1$ si se obtuvieron 3 caras.

SOLUCIÓN

Se pide calcular $\mathbb{P}(J = 1 \mid tres\ caras)$.
Por el teorema de Bayes, se sabe que

$$\mathbb{P}(J = 1 \mid tres\ caras) = \frac{\mathbb{P}(tres\ caras \mid J = 1) \cdot \mathbb{P}(J = 1)}{\mathbb{P}(tres\ caras)}$$

Es claro que

$$\mathbb{P}(tres\ caras \mid J = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

Además

$$\mathbb{P}(J = 1) = \frac{1}{6}$$

Por otra parte, usando Probabilidades totales, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(tres\ caras) &= \mathbb{P}(tres\ caras \mid J = 1) \cdot \mathbb{P}(J = 1) + ... \\ &\quad + \mathbb{P}(tres\ caras \mid J = 6) \cdot \mathbb{P}(J = 6) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(tres\ caras) &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + ... + \left(\frac{6}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6^4} \cdot \left[1 + 2^3 + ... + 6^3\right] \end{aligned}$$

Finalemente, se tiene:

$$\mathbb{P}(J = 1 \mid tres\ caras) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6^4} \cdot [1 + 2^3 + ... + 6^3]} = \frac{1}{1 + 2^3 + ... + 6^3}$$

ii) Calcule la probabilidad que J sea impar si se obtuvieron 3 caras.

SOLUCIÓN
Se pide calcular

$$\mathbb{P}(J\ impar \mid tres\ caras)$$

Que J sea impar, quiere decir que $J = 1$, o bien, $J = 3$, o bien $J = 5$.
Luego, se tiene

$$\mathbb{P}(J\ impar \mid tres\ caras) = \mathbb{P}(J = 1\ \vee\ J = 3\ \vee\ J = 5 \mid tres\ caras)$$

Dado que los eventos $J = 1$, $J = 3$ y $J = 5$, son disjuntos, y además, sabiendo que la probabilidad condicional es medida de probabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J\ impar \mid tres\ caras) &= \mathbb{P}(J = 1 \mid tres\ caras) \\ &\quad + \mathbb{P}(J = 3 \mid tres\ caras) \\ &\quad + \mathbb{P}(J = 5 \mid tres\ caras) \end{aligned}$$

En la parte anterior, ya se calculó el primer término, por otra parte, se tiene que

$$\mathbb{P}(J = 3 \mid tres\ caras) = \frac{\mathbb{P}(tres\ caras \mid J = 3) \cdot \mathbb{P}(J = 3)}{\mathbb{P}(tres\ caras)}$$

pero

$$\mathbb{P}(tres\ caras\ | J = 3) = \left(\frac{3}{6}\right)^2$$

luego

$$\mathbb{P}(J \quad = \quad 3 \mid tres\ caras) = \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6^4} \cdot [1 + 2^3 + ... + 6^3]} = \frac{27}{1 + 2^3 + ... + 6^3}$$

De manera similar, se tiene

$$\mathbb{P}(J \quad = \quad 5 \mid tres\ caras) = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6^4} \cdot [1 + 2^3 + ... + 6^3]} = \frac{125}{1 + 2^3 + ... + 6^3}$$

Luego

$$\mathbb{P}(J\ impar \mid tres\ caras) = \frac{1 + 27 + 125}{1 + 2^3 + ... + 6^3}$$

b.- Sean $A,\ B$ dos evectos tal que $\mathbb{P}(A)>0$ y $\mathbb{P}(B)>0$. Se dice que B repele a A si $\mathbb{P}(A|B)<\mathbb{P}(A)$, y que B atrae a A si no se cumple que B repele a A. Demuestre que si B atrae a A, entonces A atrae a B y B^C repele a A.

SOLUCIÓN

Se tiene que

$$B\ repele\ a\ A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B)<\mathbb{P}(A)$$

$$B\ atrae\ a\ A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B)>\mathbb{P}(A)$$

Se pide demostrar

$$B\ atrae\ a\ A \Rightarrow \begin{cases} A\ atrae\ a\ B \\ B^C\ repele\ a\ A \end{cases}$$

es decir, se pide demostrar que

$$\mathbb{P}(A \mid B)>\mathbb{P}(A) \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(B \mid A)>\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \mid B^C)<\mathbb{P}(A) \end{cases}$$

Demostremos la primera implicancia:

$$\mathbb{P}(B \mid A)=\frac{\mathbb{P}(A \mid B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

luego, por hipótesis, se tiene

$$\mathbb{P}(B \mid A)=\frac{\mathbb{P}(A \mid B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}>\frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}=\mathbb{P}(B)$$

Por lo que se llegó a lo que se quería demostrar.
Por otra parte.

$$\mathbb{P}(A \mid B^C)=\frac{\mathbb{P}(B^C \mid A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^C)}=\frac{(1-\mathbb{P}(B \mid A))\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^C)}$$

Pero se acaba de probar, que

$$\mathbb{P}(A \mid B)>\mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A)>\mathbb{P}(B)$$

Luego se tiene

$$-\mathbb{P}(B \mid A)<-\mathbb{P}(B)$$

Entonces se tiene

$$\mathbb{P}(A \mid B^C)=\frac{(1-\mathbb{P}(B \mid A))\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^C)}<\frac{(1-\mathbb{P}(B))\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^C)}=\mathbb{P}(A)$$

Por lo que se probó que lo se deseaba.