Auxiliar N°4. Variables Aleatorias unidimendionales

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Primavera 2009
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

RESUMEN.

Definición de variable aleatoria.

Sea S el espacio muestral asociado al experimento ε. X se dice variable aleatoria (v.a.) si:

$$X : S \to \mathbb{R}$$

ie, es una función que asigna a cada elemento $s \in S$, un número real *X(s)*.

Al conjunto de todos los valores posibles que puede tomar X se le llama el *recorrido* de la variable aleatoria y se denota por R_x.

X se dirá v.a. discreta si R_x es un conjunto finito o infinito numerable y continua si es no numerable.

Sucesos equivalentes.

Sea X una v.a. definida en S a valores en R_x. Los sucesos $A \subseteq S$ y $B \subseteq R_x$se dicen *equivalentes* si:

$$A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}$$

Y se define la probabilidad de B como:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$$

Binomial.

Una variable aleatoria X (discreta) posee una distribución Binomial de parametros n y p si:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Uniforme.

Una variable aleatoria X (continua) posee una distribuión Uniforme en el intervalo (α, β)ssi su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 & \sim \end{cases}$$

EJERCICIOS.

1.- Paseo aleatorio

Se tiene una partícula en el conjunto $\mathbb{Z}$ ubicada inicialmente en el 0, la partícula se mueve por turnos hacia la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad 1-p. Sea X la variable aleatoria que indica la posición de la partícula despues de n turnos. Calcule la distribución de probabilidad de X.

2.- Si la variable aleatoria K está distribuida uniformemente en el intervalo (0,5) ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xK + K + 2 = 0$ sean reales? Calcule además la probabilidad de que las raíces sean iguales.

3.- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad Binomial, de parámetros n y p. Calcule e interprete el significado de:

$$\lim_{n\to\infty p\to\infty} \mathbb{P}(X=k)\ ,\ \text{con } np=\alpha.$$

4.- Sean *f(x), g(x)* funciones de densidad de probabilidad. Muestre que $\alpha f(x)+(1-\alpha)g(x)$ es función de densidad $\forall 0<\alpha<1$, independiente de las densidades f y g, y que para cualquier otra combinación lineal esto no se cumple.

5.- Los buses en un paradero llegan cada 10 minutos despues de las 12:00. Un hombre llega al paradero X minutos despues de medio día, con X variable aleatoria continua distribuida uniforme en el intervalo $(0,60)$,ie

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60} & 0\leqslant x\leqslant 60\\ 0 & \sim\end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el hombre espere menos de 5 minutos por un bus.