Tarea 1 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.

Tres personas llegan a un cine y se sientan todos en una misma fila de n asientos (todos vacíos), de forma aleatoria. Calcule:

(a) La probabilidad de que los tres queden contiguos.
(b) La probabilidad de que exactamente dos de ellos queden contiguos.
(c) La probabilidad de que ninguno de ellos quede contiguo a otro.

Pregunta 2.

Considere un mazo de naipes.

(a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:
i) Que las 4 sean, rojas o pares.
ii) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.

(b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:
i) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
ii) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.

Pregunta 3.

Considere el alfabeto español compuesto de 27 letas (sin Ch y Ll)

(a) Se se desea escoger grupos de 10 letras al azar,¿de cuántas maneras se puede hacer?
i) Sin reposición.
ii) Con reposición.

(b) Al sacar letras (con reposición) se obtuvo al menos una "S". Calcule la probabilidad que la primera "S" se haya obtenido en la tercera extracción.

(c) Suponga ahora que se sacaron 10 letras (con reposición) y se obtuvo "MISISSIPI". ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras obtenidas, de tal forma que no queden 2 o más "T" juntas?

(d) Elegidas las 10 letras, usted y su mejor amigo(a) juegan sacando letas (de entre 10, con reposición) alternadamente, ganando el que obtiene primero una "P" o una "M". Describa un espacio muestral adecuado para este juego. ¿Cuál es la probabilidad que usted gane si comienza sacando?

Pregunta 4.

Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa de forma tal que después de cada intento (disparo) se hace girar la nuez del revolver.

(a) Si la nuez tiene capacidad para 6 balas y se pone sólo una, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.

(b) Suponga que usted tiene un super revolver con la capacidad que desee (con respecto al número de balas) y que, además, puede elegir la cantidad de balas en el super revolver para jugar. Bajo estas condiciones, ¿es posible que el juego sea equilibrado?

Pregunta 5.

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas, todas distinguibles. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso sin importar lo que hay el resto de los pasajeros. ¿De cuántas formas posibles se pueden bajar las personas del ascensor? ¿De cuántas maneras posibles se puede lograr que m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 personas se bajen en el segundo piso y así respectivamente con $m_i \in \{0, \ldots, m\}$ $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ y $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$? ¿De cuántas maneras posibles se puede lograr que todas las personas se bajen en pisos diferentes?

Pregunta 6.

Suponga que una persona esta situada a N cuadras al sur y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual se quiere llegar.

(a) ¿Cuántos caminos "inteligentes" existen entre ambos puntos? (Camino "inteligente" se entiende por aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).

(b) Considere $M = N$. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secuandaria del cuadrilátero, calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N.

NOTA: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadrilátero, o sea, todo camino "inteligente" es susceptible de ser realizado.

Pregunta 7.

La restricción vehicular reparte los 10 dígitos posibles (2 diarios) en forma aleatoria. Usted tiene dos autos cuyas patentes terminan en dígitos diferentes. Calcule:

(a) El total de formas en que puede programarse la restricción.

(b) La probabilidad de que algún día no pueda usar ninguno de sus vehículos. Indique el espacio muestral.

(c) Suponga ahora que con probabilidad p hay preemergencia en un día cualquiera, y en esos días se debe agregar 2 dígitos extra, que cada día que hay preemergencia se eligen de forma aleatoria entre los dísgitos que quedan libres. Calcule la probabilidad de no poder usar sus autos en toda la semana (lunes a viernes).

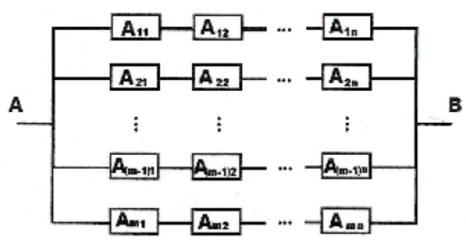
Pregunta 8.

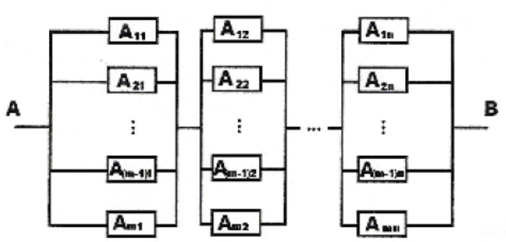
Una caja contiene $2n$ helados, n de los cuales son de naranja y el resto de frutilla. De un grupo de $2n$ personas m prefieren el helado de naranja ($0 < m < n$), s prefieren el de frutilla ($0 < s < n$) y el resto no tiene preferencia. Muestre que si los helados se distribuyen al azar entre las $2n$ personas, la probabilidad de que se respeten las preferencias de todos es:

$$\frac{\binom{2n-m-s}{n-m}}{\binom{2n}{n}}$$

Pregunta 9.

Considere los siguientes circuitos:





Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar ($(1-p)$ de fallar) y lo hacen de forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

Pregunta 10.

Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80% de los artículos de alta calidad y el resto de calidad media, en cambio cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40% de alta calidad.

Suponga que el 30% de los días la máquina está mal ajustada.

(a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamente ajustada.

(b) Bajo el mismo enunciado original, suponga ahora que un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de alta calidad, existe una probabilidad 0,05 que el operario la considere de calidad media; en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0,9. Los artículos puestos a la venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario. Si un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la razón?

Pregunta 11.

Considere un conjunto de N objetos, $\Omega = \{1, 2, ..., N\}$ y $M = P(\Omega) = \{C \ : \ C \subseteq \Omega\}$. Si se extrae un elemento "al azar" de M (i.e. subconjunto de Ω), con reposición y luego se extrae otro, calcule la probabilidad que el segundo conjunto esté contenido en el primero. Hint: Condiciones respecto a la cardinalidad de la primera extracción.

Pregunta 12.

Para predecir el tiempo, un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p.

(a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β, muestre que la probabilidad que el $n-$ésimo dia del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = \left[\left(\beta - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}$$

(b) Si el 16 de abril está seco, calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$

Pregunta 13.

Sean A, B y C subconjuntos del espacio muestra Ω. Pruebe que:

(a) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(A^C \mid B^C \cap C^C)\mathbb{P}(B^C \mid C^C)\mathbb{P}(C^C)$

(b) Suponga ahora que se satiface $0 < \mathbb{P}(B \cap C) < \mathbb{P}(B)$. Pruebe que $0 < \mathbb{P}(B \cap C^C) < \mathbb{P}(B)$ y que:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(C \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B \cap C^C)\mathbb{P}(C^C \mid B)$$

(c) Suponga $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ partición de Ω y $B \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Muestre que si $\mathbb{P}(A_1 \mid B) < \mathbb{P}(A_1)$, entonces $\exists\ i \in \{2, ..., k\}$ tal que $\mathbb{P}(A_i \mid B) > \mathbb{P}(A_i)$

Pregunta 14.

Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta el gen T, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si esto proviene de su padre, y β si este viene de su madre. Si ambos presenta el gen, es seguro que el hijo enfermará. Por otro lado, se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

(a) Si una persona está enferma ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad haya sido transmitida sólo por la madre?

(b) Suponga que la persona de la parte (a) tiene un hermano (con el mismo padre y la misma madre). Calcule la probabilidad de que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está.

Pregunta 15.

Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc.), y que las personas no están dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad p que una persona esté a favor:

Al encuestado se le presentan dos preguntas:

A ¿Está de acuerdo con el aborto?

B ¿Está en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo que si sale mayor a cuatro contesta A y en cado contrario contesta B. Por último, lo único que el encuestado responde es SI o NO.

(a) Describa un espacio muestral para este procedimiento.

(b) Si una persona respondió SI, ¿Cuál es la probabilidad que esté a favor del aborto?

(c) Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI (P_S), calcule la proporción (probabilidad) de personas que está a favor del aborto.

OBS: Suponga que la encuesta es aplicada a un gran número de personas y que éstas son honestas al responder.

Fecha de Entrega: Día Control 1.