Auxiliar N°1. Análisis Combinatorio y Axiomas de Probabilidades

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Primavera 2009
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

RESUMEN.

Análisis Combinatorio

Principio del Análisis Combinatorio. Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado éste se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 \cdot n_2$ maneras diferentes. En general

$$N_{TOTAL} = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Permutaciones. Cantidad de modos de ordenar un grupo de n elementos. Está dada por:

$$n! \equiv n \cdot (n-1)!$$

Permutaciones con elementos repetidos. Si entre n elementos hay uno que se repita a veces, otro b veces, y un tercero c veces, el total de permutaciones que se obtiene es:

$$\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

Agrupaciones Simples. Son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse entre n elementos dados, tomados de r en r diferenciándose un grupo del otro por el número de elementos que lo forman o por el orden en que se toman.

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Agrupaciones con Repetición. Son las agrupaciones que se pueden obtener con los n elementos de un conjunto, pudiendo repatirse los elementos en los subconjuntos que se obtengan con ellos.

$$n^k$$

Combinaciones. Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Total de Combinaciones. Dada una agrupación de n elementos, la cantidad total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es:

$$2^n - 1$$

Axiomática de Probabilidades

Axiomas

(A1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(A2) $P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$

(A3) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia disjunta de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades

(1) σ-Subaditividad.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(2) Aditividad.
Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos disjuntos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) Crecimiento.
Sean $A,\ B$ eventos. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

(4) Subaditividad.
Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(5) Propiedad del Complemento.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

(6) Propiedad de la Unión.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJERCICIOS.

1.- Una caja contiene esferas numeradas 1, 2, ..., n. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos si:

a) las esferas se escogen sin sustitución.
b) las esferas se escogen con sustitución.

2.- Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que el $k-$ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?

3.- Se lanzan 4 dados perfectos. Calcule la probabilidad de obtener:
a) 4 números iguales.
b) 3 números iguales.
c) 2 números iguales y los otros distintos (con la pareja y entre sí)
d) 2 números iguales y 2 números iguales (dos parejas distintas)
e) 4 números distintos.

4.- Una urna contiene 30 bolas rojas, 30 blancas y 30 azules. Se sacan 10 bolas sin reposición. Calcule la probabilidad de que al menos un color no salga.

5.- En un campeonato de tenis participan 2^n jugadores, de entre los cuales se encuentra Fernando González y Nicolás Massú. Si para definir los partidos de la primera ronda, se hicieron parejas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los chilenos tengan que jugar entre ellos en primera ronda?