Control 3

P3.

Definamos la variable aleatoria: $X_i = \begin{cases} 1 \; si\ el\ hombre\ i\ se\ emparejo\ con\ mujer \\ 0 \sim \end{cases}$

Luego X el número de parejas mixtas se puede expresar como: $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$

Como cualquier hombre tiene igual probabilidad de ser emparejado con alguna de las 199 personas restantes (de las cuales 100 son mujeres):

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{100}{199} \rightarrow E[X] = \sum_{i=1}^{100} \frac{100}{199} = \frac{100^2}{199}$$

Luego $Var\ (X) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$

Obtengamos el primer término:

$$\sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

Como los valores de X_i son 0 o 1, la esperanza de $X_i{}^2$ es igual a la esperanza X_i (ya calculada).

$$\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{100} \frac{100}{199} - \frac{100^2}{199^2} = 100\left(\frac{100}{199} - \frac{100^2}{199^2}\right)$$

Obtengamos el segundo término:

$$\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i \neq j} E(X_i \cdot X_j) - E\ (X_i) \cdot E(X_j)$$

Sabemos que: $E(X_i) = E(X_j) = \frac{100}{199}$

Además $E(X_i \cdot\ X_j\ ) = 1\ \cdot P\{X_i = 1, X_j = 1\} +\ 0\ \ \cdot P\{1,0\} + 0\ \cdot P\{0,1\} + 0\ \ \cdot P\{0,0\}$

$$= P(X_i = 1) \cdot P\left(X_j = 1 \setminus \mathrm{X_i} = 1\right) = \frac{100}{199} \cdot \frac{99}{197}$$

$$\rightarrow \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{100} \frac{100}{199} \cdot \frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199}\right)^2 = 2 \cdot \binom{100}{2} \cdot \left(\frac{100}{199} \cdot \frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199}\right)^2\right)$$

(Lo ultimo debido a que contamos los pares (X_i, X_j) y(X_j, X_i)).

Finalmente:

$$Var\ (X) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$
$$= 100\left(\frac{100}{199} - \frac{100^2}{199^2}\right) + 2 \cdot \binom{100}{2} \cdot \left(\frac{100}{199} \cdot \frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199}\right)^2\right) \approx 25{,}13$$

Por hint sabemos que se debe usar la desigualdad de Shebishev unilateral:

$$P\{X \leq b\} = P\{X \leq \mu - a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad \rightarrow \quad P\{X \leq E(X) - a\} \leq \frac{Var(X)^2}{Var(X)^2 + a^2}$$

Por enunciado: $E(X) - a = 30 \ \rightarrow \ a = E(X) - 30 \approx 50{,}25 - 30 = 20{,}25$

Luego, usando los resultados obtenidos en los cálculos previos:

$$P\{X \leq 30\} \leq \frac{25{,}13^2}{25{,}13^2 + 20{,}25^2} \approx 0{,}05$$

∴ Se concluye que la probabilidad es muy baja.

<u>Método de corrección:</u>

- Definir variable X_i. **0.3**
- Definir variable X. **0.3**
- Calcular E(X_i), argumentando correctamente. **0.6**
- Calcular E(X), argumentando correctamente. **0.6**
- Darse cuenta que E($X_i{}^2$) = E(X_i). **0.6**
- Calcular E($X_i X_j$). **0.6**
- Definir y calcular correctamente Var (X_i). **0.5**
- Definir y calcular correctamente Cov($X_i X_j$). **0.5**
- Definir y calcular correctamente Var (X). **1.0**
- Obtener el valor “a”. **0.7**
- Llegar al valor correcto de la probabilidad. **0.3**