

P2.

a) Para calcular la probabilidad del evento B.

Sea E_i : el tesoro se encuentra en la isla i – esima.

$$\Leftrightarrow B = (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1})$$

Por enunciado sabemos que la probabilidad de encontrar el tesoro en alguna de las n islas es $\frac{1}{2}$, por lo tanto:

$$P(\cup_1^n E_i) = 1/2 \quad \mathbf{0.5}$$

Veamos que $\forall i \neq j$, si ocurre el evento E_i (encontrar el tesoro en la isla i -esima), no ocurre el evento E_j (encontrar el tesoro en la isla j -esima), pues hay solo 1 tesoro y no puede estar en dos lugares a la vez. De esto, se concluye la unión disjunta de eventos que nos permite decir:

$$\sum_1^n P(E_i) = 1/2 \quad \mathbf{0.5}$$

Del enunciado también sabemos que (eventos equiprobables):

$$P(E_i) = P(E_j) = p \quad \forall i, j \quad \mathbf{0.3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_1^n p = 1/2$$

$$\Leftrightarrow np = 1/2$$

$$\Leftrightarrow p = 1/2n \quad \mathbf{0.2}$$

Finalmente

$$P(B) = P(\cup_1^{n-1} E_i) = \sum_1^{n-1} P(E_i) = \sum_1^{n-1} 1/2n = \frac{n-1}{2n} \quad \therefore \quad \mathbf{0.5}$$

b) Definimos

B^c : el tesoro está en la n -ésima isla o bien el tesoro no está en ninguna isla.

$$\Leftrightarrow B^c = E_n \cup \text{el tesoro no está en ninguna isla} \quad \mathbf{0.4}$$

Además veamos que:

$$E_n = (E_n \cap B) \cup (E_n \cap B^c) \quad \mathbf{0.5}$$

Donde $E_n \cap B = \emptyset$, pues si el tesoro está en la n -ésima isla, no puede estar en ninguna de las $n-1$ islas anteriores. Luego, $\mathbf{0.3}$

$$E_n = (E_n \cap B^c) \xrightarrow{\text{aplicamos Probabilidades}} P(E_n) = P(E_n \cap B^c) \quad \therefore \quad \mathbf{0.2}$$

Demostrando eso, se concluye que:

$$P(E_n \cap B^c) = P(E_n) = 1/2n \quad \mathbf{0.6} \quad \text{ya se resolvió en a).}$$

c) Finalmente

$$P(E_n/B^c) = \frac{P(E_n \cap B^c)}{P(B^c)} \xrightarrow[\mathbf{0.2}]{\text{de b)}} \frac{P(E_n)}{P(B^c)} = \frac{1/2n}{(n+1/2n)^{(**)}} = \frac{1}{n+1} \quad \therefore \quad \mathbf{0.3}$$

Veamos (**):

$$\begin{aligned} P(B^c) &= 1 - P(B) \quad \text{Porque la probabilidad del universo debe ser 1.} \quad \mathbf{0.5} \\ &= 1 - \frac{n-1}{2n} \quad \text{De a)} \quad \mathbf{0.3} \\ &= \frac{n+1}{2n} \quad \mathbf{0.2} \end{aligned}$$