**MA3401-1: Probabilidades**
Universidad de Chile — Profesor Joaquín Fontbona T.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — P. Aux. Héctor Olivero Q.
Departamento de Ingeniería Matemática — Semestre Primavera, 2009

# GUIA 2: ESPACIOS EQUIPROBABLES

## Problemas

1. Una ancianita con problemas de visión tiene un llavero con $n$ llaves, una de las cuales abre su casa. Si prueba llaves al azar para encontrar la que abre , sin fijarse cuáles llaves ya intentó, que probabilidad tiene de abrir la puerta en el $k-$ésimo intento? Y si va dejando de lado las llaves que ya probó?
2. Dadas 20 personas, cuál es la probabilidad de en 4 meses del año hayan exactamente 2 cumpleaños y en 4 (otros) meses hayan exactamente 4 cumpleaños?
3. $N$ personas asisten una comida. Al partir, el mayordomo que no es muy organizado les entrega a cada uno un abrigo sin preguntar si es el que corresponde (y no acepta reclamos). Con qué probabilidad exactamente $k$ personas reciben su propio abrigo? Qué ocurre con esta probabilidad cuando $n \to \infty$? Cómo interpreta el resultado?
4. 10 parejas se sientan al al azar en una mesa redonda. Calcular la probabilidad de ninguna pareja quede junta. (Ind: Sea $E_i$ el evento "La pareja $i$ quedó sentada juntaz calcule $P(\cup_{i=1}^{10} E_i)$).
5. a) Dados tres eventos $A, B$ y $C$, exprese los siguientes eventos como conjuntos: Sólo ocurre $A$; ocurren $A$ y $B$ pero $C$ no; al menos uno de los 3 eventos ocurre; al menos dos de los eventos ocurre; los tres ocurren; ninguno de los tres ocurre; a lo más uno de los tres ocurre; a lo más dos de ellos ocurren; exactamente dos de los tres ocurren; a lo más ocurren los tres eventos. Calcule la probabilidad de cada uno de ellos en términos de $P(A), P(B), P(C)$ , $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(C \cap B)$ y/o $P(A \cap B \cap C)$
   b) Juan, Pedro y Emilio lanzan por turnos una moneda, y gana el primero que obtiene cara. (Suponga que ese es el orden en que lanzan). Explique porque puede tomarse como espacio muestral $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$ y describa los eventos “gana Juan”, “ gana Pedro” y “gana Juan o Pedro”.
6. Pruebe la desiguadad de Boole para una familia infinita de conjuntos: $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
7. a) Se ponen 8 torres en un tablero de ajedrez desocupado. Cuál es la probabilidad de que “no se puedan comer” entre ellas?
   b) Se reparten las 52 cartas de un naipe. Cuál es la probabilidad de que la $14-$ava carta repartida sea un as? Cuál es la probabilidad de que el primer as repartido sea en la $14-$ava carta repartida?
   c) En la época de Galileo estaba de moda el juego llamado “pasadiez” que consistía en lanzar 3 dados, y el jugador ganaba si la suma era superior a diez y perdía en el caso contrario. i) Muestre que el juego es “justo”, es decir, las probabilidades de perder y de ganar son iguales. (Puede hacerlo de manera corta utilizando el hecho que las caras opuestas de un dadosuman 7). ii) Un jugador presentó a Galileo la siguiente “paradoja”: “El número 11 sale con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9, a pesar de que estos 4 números pueden obtenerse cada uno como la suma de 6 tríos distintos de números.” Galileo realizó unos cálculos y respondió al jugador que su razonamiento era equivocado, y además, que debería esperase que el 11 y el 10 salieran alrededor de 1,0809 veces más seguido que el 12 y el 9. Cuál fue el argumento de Galileo? (Note que el jugador tenía razón, por poco, en su observación de las frecuencias). (Esto aparece en *Considerazione sopra el giuoco dei dadi, Le Opere di Galileo Galilei, vol XIV, Florencia, 1855*).
8. Se lanza un par de dados hasta que su suma es 5 o 7. Cuál es la probabilidad de que salga 5 (antes de 7)? (Ind.: Sea $E_n$ el evento “sale un 5 en la $n-$ésima lanzada, y en las $n-1$ primeras no sale ni 5 ni 7”. Pruebe que la probabilidad buscada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ y calcule $P(E_n)$.)
9. Un juego de dados tiene las siguientes reglas: Se lanzan 2 dados. Si las suma es $2, 3$ o 12 el jugador pierde. Si es 7 u 11, gana. Si es otro número, el jugador continua a lanzar los dos dados hasta que el resultado sea o bien el resultado que obtunvo inicialmente, o bien un 7. Si es un 7, pierde. Si es

el resultado inicial, gana. Calcule la probabilidad de que el jugador gane. (Ind.: sea $E_i$ el evento "el resultado inicial es $i$ y el jugador gana". Explique porque la probabilidad buscada es igual a $\sum_{i=1}^{12} P(E_i)$ y calcule $P(E_i)$. Para esto, note (y pruebe) que $P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_{i,n})$, donde $E_{i,n}$ es el evento "el resultado inicial es $i$ y el jugador gana en la $i-$ésima tirada.)

10. En un parque nacional hay 20 huemules, de los cuales 5 son capturados, marcados y devueltos a la naturaleza. Un año más tarde, se capturan 4 de los 20. Cuál es la probabilidad de que 2 de los 4 hayan sido marcados antes?
11. Hay 5 hoteles en un pueblo. Un día llegan 3 turistas que no conocen nada del pueblo. Cuál es la probabilidad de que vayan a hoteles distintos?
12. Cúantas veces hay que lanzar 2 dados para que la probabilidad de obtener al menos una vez un doble 6 sea mayor que $\frac{1}{2}$?