

GUIA DE EJERCICIOS 5 MA3401

2 de Diciembre de 2009

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliar: Héctor Olivero

1. Sea (X_n) una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Encuentre los valores propios de P . En caso de tener valores propios complejos escribalos en la forma polar $re^{i\theta}$.
- Deduzca que para todo $n \geq 1$, $p_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \{\beta_{ij} \cos \frac{n\pi}{2} + \gamma_{ij} \sin \frac{n\pi}{2}\}$ para ciertas constantes $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ que deben ser números reales.
- Calcule directamente $p_{11}^{(0)}, p_{11}^{(1)}$ y $p_{11}^{(2)}$ y deduzca los valores de α_{11}, β_{11} y γ_{11} . Finalmente, obtenga el valor de $p_{11}^{(n)}$ para cualquier $n \geq 1$.

2. *Cadena de nacimiento y muerte discreta*

Sea (X_n) una cadena de Markov a valores en $\mathbb{N}$ con matriz de transición dada por $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = q_i$ para $i = 1, 2, \dots$, donde se cumple que $0 < p_i = 1 - q_i < 1$, y $p_{0,0} = 1 - p_{0,1} = 1$.

Se usa (X_n) para modelar la evolución del número de individuos de una población.

Sea $h_i := \mathbb{P}_i(X_n \text{ llegue a } 0)$ la “probabilidad de extinción” partiendo de i (porque llamarla así?).

- a. Pruebe que

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_i &= p_i h_{i+1} + q_i h_{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- b. Defina $u_i = h_{i-1} - h_i$ para $i = 1, 2, \dots$. Verifique que

$$u_{i+1} = \left(\frac{q_i}{p_i}\right) u_i = \left(\frac{q_i q_{i-1} \cdots q_1}{p_i p_{i-1} \cdots p_1}\right) u_1.$$

- c. Denotando $A = u_1$, $\gamma_i = \left(\frac{q_i q_{i-1} \cdots q_1}{p_i p_{i-1} \cdots p_1}\right)$ para $i = 1, 2, \dots$ y $\gamma_0 = 1$, pruebe que para $i = 1, 2, \dots$,

$$h_i = 1 - A(\gamma_0 + \dots + \gamma_{i-1}).$$

- d. Pruebe que si $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$, entonces $h_i = 1$ para todo i , es decir, en ese caso la población se extingue casi seguramente cualquiera sea el número inicial de individuos. (Ind.: recuerde la definición de h_i).

(Nota: se puede probar también que si $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$, entonces para todo $i = 1, 2, \dots$ se tiene $h_i < 1$, es decir la población tiene probabilidad positiva de no extinguirse, cualquiera sea su tamaño inicial.

3. Sea (X_n) un paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}$. Es decir, una cadena de Markov con matriz de transición dada por $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, con $0 < p = 1 - q < 1$.

Se probará que si $p = q = \frac{1}{2}$, el paseo es recurrente, y si por el contrario $p \neq q$, entonces el paseo es transiente.

- a. Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene $p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{2} p^n q^n$ y $p_{00}^{(2n+1)} = 0$. (Ind.: para el primero, cuente el número de formas de volver a 0 en $2n$ pasos).

- b. Pruebe los resultados buscados usando la aproximación de Stierling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ y la caracterización de recurrencia en términos de $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$.

4. Sean $(N_t^1)_{t \geq 0}$ y $(N_t^2)_{t \geq 0}$ procesos de Poisson independientes de parámetros $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ respectivamente.

Se puede probar que el proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ que cuenta las llegadas de ambos procesos hasta cada instante t debe ser un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

- a. Dé dos argumentos intuitivos (distintos) para que expliquen este resultado usando
- i La ley de los incrementos de un proceso de Poisson y la propiedad “aditiva” de la ley de Poisson.
 - ii La ley del instante de la primera llegada de N_t , y a continuación propiedades de las v.a. exponenciales para justificar las leyes de los tiempos inter-llegadas sucesivos.

- b. Sean E_1 y E_2 dos exponenciales independientes de parámetros λ_1 y λ_2 . Defina la v.a. K a valores en $\{1, 2\}$ por

$$K = \begin{cases} 1 & \text{si } E_1 < E_2 \\ 2 & \text{si } E_2 < E_1 \end{cases}$$

Pruebe que $\mathbb{P}(K = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

- c. En un paradero pasan buses de recorridos A y B . El bus de recorrido A pasa a una tasa de 6 buses por hora, y el bus B a una tasa de 4 buses por hora.

- iCuál es la ley del número de buses que pasan en 3 horas?
- iiCuál es la probabilidad de que los dos primeros buses que pasen sean del recorrido A ? (Ind.: use c) para calcular la probabilidad de que el 1er bus sea de un recorrido dado. Explique porque el evento “el segundo bus es del tipo A ” es independiente de “el primer bus es del tipo A ” y concluya.
- iiiii Dado que han pasado 7 buses en media hora, cuál es la probabilidad de que 5 sean del recorrido B ?
- iv Hay huelga de conductores de recorrido A y se estima que circularán uno de cada 3 buses.Cuál es la ley número de buses que pasan en 3 horas?