Universidad de Chile — Profesor Joaquín Fontbona T.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — Auxiliar Héctor Olivero Q.
Departamento de Ingeniería Matemática — Semestre Primavera, 2009

PROCESO DE POISSON EN $\mathbb{R}_+$

Figura 1. **Siméon Denis Poisson** (Pithiviers, Francia, 21 de junio de 1781-Sceaux, Francia, 25 de abril de 1840), fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad, también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. (*Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Simeon_Poisson*)

1. Introducción

Veremos como aparece la v.a. de Poisson cuando observamos durante un intervalo de tiempo la ocurrencia de ciertos "acontencimientos raros", asociados a una cantidad grande de objetos independientes. Por ejemplo, si se observa cierta masa de material radiactivo, y se mide en un intervalo de tiempo la cantidad partículas radioactivas emitidas (en la práctica, esto es lo que hace un "contador Geiger"). Cada partícula emitida corresponde a la desintegración de un átomo. Es muy poco probable que en un intervalo de tiempo (fijo) un determinado átomo se desintegre, pero estamos observando muchísimos átomos y sí es probable que algunos de ellos lo harán en ese intervalo. Un fenómeno similar se observa cuando registramos los instantes de *llegadas* de llamadas telefónicas a una central telefónica (cada una correspondiendo al instante en que una persona determinada decide hacer una llamada), o las llegadas de clientes a un servicio.

Una manera de ver la conexión entre estos modelos y la ley de Poisson, es dividiendo el intervalo de tiempo $]0,t]$ en m intervalos de igual largo $]t_{k-1},t_k]$. Si suponemos que en cada intervalo se puede producir a lo más una llegada, cada vez independientemente y con probabilidad p_m, la ley del número de llegadas en $]0,t]$, cuando $m\to\infty$ y mp_m tiende a una constante no nula estás dado por el límite de Poisson.

Adoptaremos un enfoque en apariencia diferente (pero en realidad equivalente), usado habitualmente la modelación de fenómenos como los antes descritos. Este se basa en la observación empírica, hecha por Erlang en los años 1910-1920 de que los tiempos entre llegadas en (por ejemplo) una red telefónica parecen "no tener memoria", y ser independientes entre sí. Esto nos lleva a la construcción "clásica" del llamado **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$.** Pero antes de pasar a ello revisaremos un par de propiedades fundamentales de la variable aleatoria de Poisson.

Proposición 1. Propiedad aditiva: *Sea $\lambda_j \in]0,\infty[$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y $(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. independientes con $Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$. Sea $\lambda := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \in]0,\infty]$. Entonces*

$$Z := \sum_{j=1}^{\infty} Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Demostración Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = m) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(Z_1 = k, Z_2 = m-k)\\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2}m!\\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\end{aligned}$$

y por inducción se obtiene el resultado para sumas finitas. Si ahora $Z := \sum_{j=1}^{\infty} Z_j$, dado que para todo $r \in \mathbb{N}$, $\{Z_1 + \cdots + Z_n \leq r\} \searrow \{Z \leq r\}$ cuando $n \to \infty$, se deduce

$$\mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_n \leq r) \to \mathbb{P}(Z \leq r).$$

Luego, $\mathbb{P}(Z \leq r) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Si $\lambda = \infty$ entonces $\mathbb{P}(Z \leq r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$ de donde $Z = \infty$ c.s. En caso contrario, tenemos $\mathbb{P}(Z = r) = \mathbb{P}(Z \leq r) - \mathbb{P}(Z \leq r-1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$.

$\square$

Lema 1. Sumas condicionadas de v.a. de Poisson *Sean $Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$ con $j = 1\ldots,m$ v.a. independientes y $\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$. Entonces la ley de $(Z_1,\ldots,Z_m)$ condicional a $Z := \sum_{j=1}^{m} Z_j$ es multinomial de parámetros $\left(Z; \frac{\lambda_1}{\lambda},\ldots,\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)$. Es decir*

$$\mathbb{P}\left(Z_1 = n_1,\ldots,Z_m = n_m \middle| \sum_{j=1}^{m} Z_j = n\right) = \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{n_m}$$

si $n_1 + \cdots + n_m = n$, y 0 si no.

Demostración Se obtiene directamente de las igualdades

$$\mathbb{P}\left(Z_1 = n_1,\ldots,Z_m = n_m, \sum_{j=1}^{m} Z_j = n\right) = \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!}, \quad \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{m} Z_j = n\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

$\square$

Lema 2. *Sean $\lambda \in]0,\infty[$ y $p \in]0,1[$. Sean $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y X una v.a. tal que, condicionalmente a Z, X tiene ley $B(Z;p)$. Es decir, para todo $m,k \in \mathbb{N}$ con $k \leq m$,*

$$\mathbb{P}(X = k | Z = m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Entonces, $X \sim \mathcal{P}(p\lambda)$, $Z - X \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$ y son independientes.

Demostración

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = m, Z - X = n) =& \mathbb{P}(X = m | Z = n+m)\mathbb{P}(Z = n+m)\\ =& \binom{n+m}{m} p^m (1-p)^n \frac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda}\\ =& \frac{(p\lambda)^m}{m!} e^{-p\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} e^{-(1-p)\lambda}\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio: Probar recíproca del Lema 1:

Lema 3. *Sea $\lambda \in]0,\infty[$, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m)$ una v.a. que condicionalmente a Z, tiene ley $\mathcal{M}(Z; p_1, \dots, p_m)$. Entonces las coordenadas de $\mathbf{M}$ son independientes entre sí, y $\mathbf{M}_j \sim \mathcal{P}(p_j \lambda)$.*

En el ejericio anterior se tiene $\sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j = Z$. Luego, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, una v.a. de Poisson Z *siempre* es la suma de m v.a. con ley de Poisson, independientes entre sí. Para generarlas, sabiendo que $Z = n$, tiramos n veces un dado de m caras y contamos cuantas veces salió cada una de ellas. Si el dado es equilibrado ($p_j = \frac{1}{m}$ para cada j), entonces las variables $\mathbf{M}_j$ tienen todas la misma ley. Por lo tanto, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, una v.a. de Poisson es la suma de m v.a. i.i.d entre sí. Una ley con esta propiedad se dice **infinitamente divisible**.

2. Construcción del Proceso de Poisson

Consideremos $\lambda \in]0,\infty[$ y v.a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ independientes de ley $\mathbf{e}(\lambda)$, definidas en cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nos referiremos a estas variables los "tiempos de permanencia". Llamaremos "instantes de salto del proceso.º "instantes de llegadas" a la sucesión de v.a. definidas para $\omega \in \Omega$,

$$T_0(\omega) = 0, \quad T_1(\omega) = S_1(\omega), \quad T_n(\omega) = S_1(\omega) + \cdots + S_n(\omega).$$

Del hecho que $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$ para todo n, se deduce que la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es c.s. estrictamente creciente.

El **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de parámetro λ** es la familia $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatorias definida en $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ por

$$N_t(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{1}_{\{T_n(\omega)\le t<T_{n+1}(\omega)\}}.$$

Para cada "realización" (cada $\omega\in\Omega$) de todas las variables $T_0(\omega),T_1(\omega),\dots,$ la variable aleatoria $N_t(\omega)$ es el número de ellas que han tomado valores en el intervalo $]0,t]$. A su vez, los "incrementos del proceso", es decir las diferencias de la forma $N_{t+s}-N_s$ corresponden exactamente al número de eventos ocurridos en el intervalo $]s,s+t]$.

Es importante notar además las siguientes propiedades:

- Para cada $t\in\mathbb{R}_+$, N_t es un número natural. En particular, es **finito** c.s. Esto se sigue del hecho que para $t>0$, $\mathbb{P}(T_n\le t)\le\mathbb{P}(S_1\le t,\dots,S_n\le t)=(1-e^{-\lambda t})^n\to 0$ cuando $n\to\infty$, luego $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}T_n\le t)=\mathbb{P}(N_t=\infty)=0$.
- Para cada "realización" $\omega\in\Omega$, tenemos que $N_0(\omega)=0$, y la función $t\mapsto N_t(\omega)$ es no decreciente, continua a la derecha con limíte por la izquierda, y constante por pedazos. Los largos de los pedazos son las variables S_n. Las discontinuidades ocurren en los instantes de saltos T_n y son de tamaño 1.

A continuación estudiaremos la "ley del proceso".

Lema 4. *Para todo $t\in\mathbb{R}_+$ se tiene*

$$N_t\sim\mathbb{P}(\lambda t).$$

Además para cada $t>0$, la ley de $T_{n+1}-t$ condicional al evento $\{N_t=n\}$ es igual a la ley de T_1:

$$\mathbb{P}(T_{n+1}-t>s|N_t=n)=\mathbb{P}(T_1>s)=e^{-\lambda s}$$

Demostración Notar que se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{N_t=n\}=\{T_n\le t<T_n+S_{n+1}\}.$$

Luego, dado que T_n y S_{n+1} son independientes, la primera con ley $Gamma(\lambda,n)$ y la segunda con ley $\mathbf{e}(\lambda)$, tenemos

$$\mathbb{P}(N_t=n)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\int_{t-x}^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\ dx=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}dx=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},$$

lo que prueba la primera afirmación. Para la segunda, partimos de la igualdad de conjuntos

$$\{N_t=n,T_{n+1}>t+s\}=\{T_n\le t,T_n+S_{n+1}>t+s\}.$$

Usando nuevamente la independecia de S_{n+1} y T_n, obtenemos que

$$\mathbb{P}(N_t=n,T_{n+1}>t+s)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\int_{t+s-x}^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\ dx=e^{-\lambda(t+s)}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Dividiendo por $\mathbb{P}(N_t=n)$ se llega a la expresión buscada. $\square$

La segunda parte del Lema anterior es reminisencia de la pérdida de memoria de la ley exponencial: nos dice simplemente que si sabemos exactamente cuantas "llegadas" han ocurrido hasta el instante t, el tiempo (aleatorio) que transcurrirá hasta la llegada siguiente se comporta como el tiempo (aleatorio) que tarda en ocurrir la primera llegada.

Nos interesa conocer además la "ley conjunta" de varias coordenadas, es decir de los tuplas aleatorias de la forma $(N_{t_1}, N_{t_2}, \ldots, N_{t_m})$ para tiempos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$.

Lema 5. *Sean $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Entonces, condicionalmente al evento $\{N_t = n\}$, la ley de los tiempos de permanencia $(T_{n+1} - t, S_{n+2}, \ldots, S_{n+m})$ es igual a la ley de $(S_1, \ldots, S_m)$, es decir son v.a. independienes con ley $\mathbf{e}(\lambda)$.*

Demostración Tenemos la igualdad

$$\{N_t = n, T_{n+1} - t > s_1, S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m\} = \\ \{T_n \leq t, T_{n+1} > t + s_1, S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m\}.$$

y dado que $S_{n+2}, \ldots, S_{n+m}$ son independientes de (T_n, T_{n+1}),la probabilidad de este conjunto es

$$\mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t + s_1)\mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m) = \\ \mathbb{P}(N_t = n, T_{n+1} > t + s_1)\mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m)$$

.

Dividiendo por $\mathbb{P}(N_t = n)$ y usando la segunda parte del lema anterior, concluimos que

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s_1, S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m | N_t = n) = \\ \mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \ldots S_{n+m} > s_m)\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s_1 | N_t = n) = \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda s_j}.$$

□

Ahora podemos describir completamente la ley de un proceso de Poisson "standard":

Teorema 1. *Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ instantes dados. Entonces las variables aleatorias $(N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_m} - N_{t_{m-1}})$ son independientes y sus leyes son Poisson de parámetros $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), \ldots, \lambda(t_m - t_{m-1})$.*

En particular, para todo $t, s > 0$, $N_{t+s} - N_s$ tiene ley $\mathbb{P}(\lambda t)$, igual a la de N_t.

Demostración Haremos la demostración para $m = 2$ (para $m > 2$, la demostración es una generalización de este argumento y se deja al lector como ejercicio). Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) =& \mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} = n + m) \\ =& \mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1}, N_{t_1} = n) \\ =& \mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1} | N_{t_1} = n)\mathbb{P}(N_{t_1} = n). \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}\{T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1}\} =&\{T_{n+1} + \cdots + S_{n+m} \leq t_2 < T_{n+1} + \cdots + S_{n+m+1}\}\\ =&\{(T_{n+1} - t_1) + \cdots + S_{n+m} \leq t_2 - t_1 < (T_{n+1} - t_1) + \cdots + S_{n+m+1}\},\end{aligned}$$

por el lema precedente concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1} | N_{t_1} = n) =&\mathbb{P}(S_1 + \cdots + S_m \leq t_2 - t_1 < S_1 + \cdots + S_{m+1})\\ =&\mathbb{P}(T_m \leq t_2 - t_1 < T_{m+1})\\ =&\mathbb{P}(N_{t_2 - t_1} = m)\end{aligned}$$

Combinando las igualdades previas, obtenemos finalmente

$$\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) = \mathbb{P}(N_{t_2 - t_1} = m)\mathbb{P}(N_{t_1} = n).$$

□

Así, podemos calcular las covarianzas del proceso para dos instantes $s < t$. En efecto, dado que $N_t - N_s$ y N_s son independientes, entonces $N_t - N_s - \lambda(t-s)$ y $N_s - \lambda s$ también lo son. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}cov(N_s, N_t) =&\mathbb{E}\left((N_t - \lambda t)(N_s - \lambda s)\right)\\ =&\mathbb{E}\left((N_t - N_s - \lambda(t-s))(N_s - \lambda s)\right) + \mathbb{E}\left((N_s - \lambda s)^2\right),\\ =&\mathbb{E}\left(N_t - N_s - \lambda(t-s)\right)\mathbb{E}\left(N_s - \lambda s\right) + \lambda^2 s^2\\ =&\lambda^2 s^2\end{aligned}$$

dado que $\mathbb{E}(N_s) = \lambda s$ y que $\mathbb{E}((N_s - \lambda s)^2) = \lambda^2 s^2$.

El teorema nos permite también calcular explicitamente la probabilidad de un eventos para $(N_{t_1}, N_{t_2}, \ldots, N_{t_m})$: dados naturales $n_1 \leq \cdots \leq n_m$ tenemos para $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} = n_2, \ldots, N_{t_m} = n_m) =&\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2 - n_1, \ldots\\ &, N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = n_m - n_{m-1})\\ =&\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!}.\end{aligned}$$

Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = t$. Gracias al Lema 1 sobre de sumas de v.a. de Poisson condicionadas, y el teorema anterior, podemos obtener la ley del número de llegadas en cada intervalo de tiempo $]t_{j-1}, t_j]$ condicional al número total de llegadas en $]0, t]$. En efecto,

$$N_t = (N_{t_m} - N_{t_{m-1}}) + \cdots + (N_{t_1} - N_{t_0})$$

es una suma de v.a. de Poisson independientes $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$, cada una com parámetro $\lambda(t_j - t_{j-1})$. Luego, la suma de los parámetros es λt, y por el Lema 1 deducimos la siguiente

Proposición 2. *Condicionalmente al evento* $\{N_t = n\}$, $(N_{t_m} - N_{t_{m-1}}, \ldots, N_{t_1} - N_{t_0})$ *tiene ley* $\mathcal{M}(n; \frac{t_1 - t_0}{t}, \ldots, \frac{t_m - t_{m-1}}{t})$

La ley multinomial nos sugiere que, si sabemos que han ocurrido n llegadas en el intervalo $]0,t]$, los intervalos $]t_{j-1},t_j]$ en donde ellas se ubican fueron "elegidos" de manera independiente para cada llegada, y cada intervalo con probabilidad $\frac{t_j-t_{j-1}}{t}$.

De hecho, si $U_1,\dots,U_n$ son n v.a. i.i.d de ley uniforme en $]0,t]$, es decir, cada U_j tiene densidad

$$\frac{1}{t}\mathbf{1}_{]0,t]}(x),$$

entonces el vector con el número de ellas que cae en cada intervalo $]t_{j-1},t_j]$, $j=1,\dots,m$ tiene justamente la misma distribución multinomial $\mathcal{M}(n;\frac{t_1-t_0}{t},\dots,\frac{t_m-t_{m-1}}{t})$.

Esto refleja una relación profunda entre el proceso de Poisson, visto como una "distribución aleatoria de puntos en $\mathbb{R}_+$" y la ley uniforme, la que formalizamos a continuación.

Proposición 3. *Sea $t>0$ y $U_1,\dots,U_n$ v.a. i.i.d de ley uniforme en $]0,t]$. Entonces, la ley de los instantes de salto $(T_1,\dots,T_n)$ condicional al evento $\{N_t=n\}$, es igual a la ley del reordenamiento creciente $(U_{(1)},\dots,U_{(n)})$ del vector $(U_1,\dots,U_n)$.*

Demostración Dado que $(T_1,\dots,T_n)$ y $(U_{(1)},\dots,U_{(n)})$ son crecientes, basta probar que

$$\mathbb{P}(T_1\le s_1,T_2\le s_2,\dots,T_n\le s_n|N_t=n)=\mathbb{P}(U_{(1)}\le s_1,\dots,U_{(n)}\le s_n).$$

para $0\le s_1\le\cdots\le s_n<t$ (si $s_j>s_{j+1}$, se puede reemplazar s_j por s_{j+1} y se obtiene un evento equivalente). En ese caso, para $(V_j)_{j=1}^n=(T_j)_{j=1}^n$ y $(V_j)_{j=1}^n=(U_{(j)})_{j=1}^n$ se puede descomponer $\{V_1\le s_1,\dots,V_n\le s_n\}$ en una unión disjunta de eventos de la forma

$$\big\{|\{j:V_j\in]0,s_1]\}|=m_1,|\{j:V_j\in]s_1,s_2]\}|=m_2,\dots,|\{j:V_j\in]s_{n-1},s_n]\}|=m_n\big\}$$

con $0\le m_i\le n$ para $i=1\dots,n$ y $m_1+\cdots+m_n=n$ ($|\cdot|$ denota aquí el cardinal). Pero

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|\{j:U_{(j)}\in]0,s_1]\}|=m_1,\dots,|\{j:U_{(j)}\in]s_{n-1},s_n]\}|=m_n)\\
&\qquad=\mathbb{P}(|\{j:U_j\in]0,s_1]\}|=m_1,\dots,|\{j:U_j\in]s_{n-1},s_n]\}|=m_n)\\
&\qquad=\frac{n!}{(m_1!)\cdots(m_n!)}\left(\frac{s_1}{t}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{s_n-s_{n-1}}{t}\right)^{m_n}\\
&\qquad=\mathbb{P}(N_{s_1}=m_1,\dots,N_{s_n}-N_{s_{n-1}}=m_n|N_t=n)
\end{aligned}$$

la última igualdad gracias a la Proposición 2. Se concluye usando la igualdad de eventos

$$\begin{aligned}
&\{N_{s_1}=m_1,\dots,N_{s_n}-N_{s_{n-1}}=m_n,N_t=n\}=\\
&\qquad\{|\{j:T_j\in]0,s_1]\}|=m_1,\dots,|\{j:T_j\in]s_{n-1},s_n]\}|=m_n,N_t=n\}
\end{aligned}$$

□