GUIA 4

Problemas

1. Se sabe que un átomo individual del isótopo radioactivo Carbono 14 (C14), después de haberse constituido o sintetizado, se degrada tras un "tiempo de vida" aleatorio, que tiene ley exponencial de parámetro λ. Al hacerlo, se transforma en un átomo estable de Carbono "usual" (C12) . Además, la desintegración de un átomo no tiene ninguna influencia sobre átomos próximos.

   Por otro lado, es sabido que cada organismo vivo absorbe constantemente átomos de C14, de forma tal que la razón entre la cantidad de átomos de este isótopo y la cantidad total de átomos de Carbono que porta (es decir, C12 más C14) es constante durante su vida e igual a un número $\alpha \in (0,1)$ conocido. Sin embargo, cuando muere, ya no absorbe más C14, y la proporción de C14 comienza a disminuir debido a la degradación de los átomos de isótopo.

   a. Se estudia el tejido de un organismo muerto hace mucho tiempo. Explique por qué es razonable suponer, en base a todo lo anterior, que todos los átomos de C14 hayados en el presente en este tejido (es decir, aquellos que no se han degradado todavía) fueron sintetizados en el momento de la muerte del organismo.

   b. En base a lo anterior, y suponiendo que la cantidad de átomos de C14 en el tejido es muy grande, muestre que la proporción $\beta \in (0,1)$ de átomos de C14 que no se han desintegrado (entre el total del átomos de C14 presentes en el momento de la muerte) es, pasado un tiempo t desde la muerte del organismo, aproximadamente igual a $e^{-\lambda t}$.
   Ind: Suponga que hay infinitos átomos de C14 presentes en el momento de la muerte del organismo, y "enumerelos". Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ los tiempos de "vida" de cada uno de ellos. Note entonces que si se consideran "los n primeros átomos de C14" de la lista, la proporción de ellos que no se han desintegrado transcurrido un tiempo t es

   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i > t\}}.$$

   c. Se calcula la masa total de Carbono del tejido, siendo esta igual a m. Por otro lado, se determina que la masa de C14 en el mismo tejido es m'. Hace cuánto tiempo murió el organismo estudiado? (Asuma que la diferencia de masa entre átomos de C12 y C14 es despreciable) R: $\frac{\ln(\frac{m'}{\alpha m})}{-\lambda}$)
   Nota: el tiempo tal que $\beta = \frac{1}{2}$ se llama "vida media" del isótopo.

2. Cuántas veces hay que lanzar una moneda equilibrada para que la proporción de caras obtenidas esté con una probabilidad superior o igual a 0.96 en el intervalo $[1/2 - 0{,}01, 1/2 + 0{,}01]$? (Ind: use TCL)

3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ la cantidad de público que llega a un cine nuevo con 5 salas en los días $1, 2, \ldots$. Se considera que X_i se modelan bien por v.a. de Poisson independientes de parámetro λ.

   a. Dos meses después de la inauguración, han venido 30.000 personas. Estime λ.

   b. El cine deberé cerrar si el público total durante el próximo año es menor a 100000 personas. Estime la probabilidad de que esto ocurra.

4. Una linea aerea debe optimizar sus vuelos de 200 pasajeros, teniendo en cuenta la siguiente información:

   • el peso en kilos de cada pasajero es una v.a. de esperanza 65 y desviación estandar (es decir, raíz de la varianza) igual a 15;
   • cuando el peso máximo de equipaje autorizado por pasajero es Mkg, el peso del equipaje de cada pasajero es una v.a. de esperanza $0{,}7M$ y desviación estandar $0{,}2M$;
   • las 400 v.a. correspondientes a los pesos de los pasajeros y el de sus equipajes son independientes.

Cúal es el valor máximo de M que permite que en el 95 % de los vuelos el peso total de los 200 pasajeros y su equipaje no sobrepase el valor máximo autorizado de 18 toneladas?

5. Un restaurante puede servir 75 comidas por noche, y sólo acepta clientes con reservación. La experiencia muestra que 20 % de los clientes que reservan no vienen.
   Cuántas reservaciones debe aceptar el restaurant para que la probabilidad de poder servir a todos los clientes que vendrán sea mayor o igual a 0,9?
6. Una compañia de seguros se propone asegurar 100000 clientes contra robo. Los montos en miles de pesos $X_1, \dots, X_{100000}$ que serán cobrados cada año a la compañia (la gran mayoría de ellos 0) son v.a. independientes de esperanza 75 y desviación estandar 750. Qué prima anual debe cobrar la companía a cada asegurado, para que sus gastos de operación, evaluados en 1500 millones de pesos, sean cubiertos con probabilidad mayor o igual a 0.999? (Ind: utilise TCL)
7. Una central telefónica se contruye para 5000 lineas. Cada día, cada usuario llama en hora de punta con probabilidad $p = 0{,}02$.
   Qué capacidad de llamadas simultáneas debe tener la central para que la probabilidad de saturarse sea menor que 0,1? Haga el cálculo con dos aproximaciones distintas de la ley binomial. Compare los resultados y diga cuál aproximación es más "razonable" (Ind: note que p es bastante pequeño.)
8. a. (4.0) Se lanza un dado equilibrado hasta que se obtiene un 6. Sean X, Y respectivamente el lanzamiento en que se obtuvo el 6 y el número de 5's que salieron antes del 6. Calcule le ley conjunta de (X, Y) y la esperanza de Y.
   b. (2.0) La cisterna de una estación gasolinera es llenada cada lunes en la mañana. La venta semanal, en miles de litros, es una v.a. de densidad :
   $$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Cuál debe ser la capacidad mínima de la cisterna para que en promedio, la gasolinera se quede corta a lo más una de cada cien semanas?
9. Considere un par de v.a. (X, Y) con densidad
   $$f_\lambda(x, y) = c_\lambda e^{-\lambda y} \mathbb{I}_D(x, y)$$
   donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$.
   - (1.0) Cuánto vale c_λ ?
   - (3.0) Determine la ley conjunta del par $(\frac{X}{Y}, Y)$, las leyes marginales de $\frac{X}{Y}$ e Y, e indique si estas dos v.a. son independientes.
   - (2.0) Determine la ley de X condicional a $Y = y$ y calcule $Var(X|Y = y)$

10.. Una linea aerea quiere planificar ciertos vuelos de 200 pasajeros. Para mantener los costos en un rango competitivo, la linea está obligada a sobrevender los vuelos. La experiencia muestra que 5 % de los pasajeros no llegan o llegan después de cerrado el vuelo. Cuál es el máximo de pasajes por vuelo que puede vender la compañia, para que la probabilidad de "dejar pasajeros abajo" sea menor que 0.1 ?

11. **Ley de Poisson y ley multinomial**
    Sean $Z_j \sim \mathcal{P}oiss(\lambda_j)$ con $j = 1 \dots, m$ v.a. independientes y $Z := \sum_{j=1}^m Z_j$. Pruebe que la ley de $(Z_1, \dots, Z_m)$ condicional a $Z = n$ es multinomial de parámetros $\left(n; \frac{\lambda_1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)$, con $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j$. Es decir
    $$P\left(Z_1 = n_1, \dots, Z_m = n_m \middle| \sum_{j=1}^m Z_j = n\right) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{n_m}$$
    si $n_1 + \cdots + n_m = n$, y 0 si no.
    Muestre que, recíprocamente, si $Z' \sim \mathcal{P}oiss(\lambda)$ con $\lambda \in]0, \infty[$, y $\mathbf{M} := (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m)$ es una v.a. a valores en $\mathbb{N}^m$ que condicionalmente a $Z = n$ tiene ley multinomial de parámetros $(n; p_1, \dots, p_m)$, entonces las coordenadas de $\mathbf{M}$ son independientes entre sí, y $\mathbf{M}_j \sim \mathcal{P}(p_j \lambda)$ para cada j.
12. **Sobre el proceso de Poisson.**

Sean $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ v.a. independientes de ley $\mathbf{e}xp(\lambda)$ con $\lambda \in]0,\infty[$. Nos referiremos a estas variables los "tiempos de permanencia"del proceso o tiempos "inter llegadas". Llamaremos "instantes de salto del proceso.º "instantes de llegadas.ª la sucesión de v.a. definidas para $\omega \in \Omega$,

$$T_0(\omega) = 0, \quad T_1(\omega) = S_1(\omega), \quad T_n(\omega) = S_1(\omega) + \cdots + S_n(\omega).$$

El **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de parámetro λ** es la familia $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatorias (indexada por $\mathbb{R}_+$) definida por

$$N_t(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

Note que $\omega \in \Omega$, la variable aleatoria $N_t(\omega)$ es el número de llegadas ocurridas en el intervalo $]0,t]$. (Puede pensar que las v.a. T_n representan por ejemplo, los instantes en que llegan clientes a un banco).

a. Pruebe que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t < \infty$ c.s.
   Ind.: Muestre que $\mathbb{P}(T_n \leq t) \leq \mathbb{P}(S_1 \leq t, \ldots, S_n \leq t) = (e^{-\lambda t})^n \to 0$ y deduzca que $\mathbb{P}(N_t = \infty) = 0$.
b. Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}_+$ el número de llegadas ocurridas hasta el instante t tiene ley de Poisson de parámetro λ, es decir,

$$N_t \sim \mathcal{P}oiss(\lambda t).$$

   Ind.: Muestre que $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_n + S_{n+1}\}$. Luego, use el hecho que T_n y S_{n+1} son independientes, la primera con ley $Gamma(\lambda, n)$ (i.e. de densidad $\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}$) y la segunda con ley $\mathbf{e}xp(\lambda)$ para calcular $\mathbb{P}(N_t = n)$. Le será útil el hecho que $\Gamma(n) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$, lo que se muestra por inducción.
c. Pruebe que para cada $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s | N_t = n) = \mathbb{P}(T_1 > s) = e^{-\lambda s}$$

   Deduzca que para cualquier instante $t \geq 0$, la ley del tiempo restante hasta la siguiente llegada condicional al número de llegadas ya ocurridas, es exponencial de parámetro λ.

13. “La aguja de Buffon”
    Considere un piso de “parquet” consistente en bandas paralelas de madera muy largas y de ancho $a > 0$.
    a. Se lanza una aguja de largo $l \in (0,a)$ sobre el piso. Cuál es la probabilidad de que caiga sobre dos bandas de madera.
       Ind.: Suponga que la distancia X desde el centro de la aguja al momento de caer, hasta el borde de banda más cercano, se distribuye uniformemente en $[0, a/2]$. Suponga además que al caer, el ángulo θ que forma la aguja con el eje perpendicular a la dirección de las bandas se distribuye uniformemente en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y que X y θ son independientes.
       Escriba el evento estudiado en términos de ambas variables aleatorias y deduzca que la probabilidad de que ocurra es $\frac{2l}{\pi a}$.
       (Nota: este problema fue planteado y resuelto por Georges Louis Leclerc Conde de Buffon, naturalista francés, 1707 - 1788)
    b. Cómo puede calcular π si se dispone de una aguja y un parquet como en la parte a.? (Ind.: También se dispone de mucho tiempo...)
14. Sean (G_n) v.a. geométricas de parámetros $p_n := \lambda/n > 0$ (definidas para n suficientemente grande).
    Pruebe que la sucesión de variables aleatorias (G_n/n) converge en ley a una v.a. exponencial de parámetro λ.
    Ind.: Note que para todo $x \geq 0$, $\mathbb{P}(G_n/n > x) = \mathbb{P}(G_n > \lfloor xn \lfloor)$ y encuentre el límite de esta última expresiíon cuando $n \to \infty$.
15. **Desigualdad de concentración para el lanzamiento de la moneda**

Sean $(X_n)_{n\geq 0}$ v.a. i.i.d. de varianza finita σ^2 y media μ. Denotemos $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Usando la desigualdad de Tchebychev se probó en clases que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

es decir dicha probabilidad tiende a 0 al menos como $\frac{1}{n}$ cuando $n \to \infty$.

El objetivo de este problema es probar que para el caso de v.a. X_n i.i.d de Bernoulli de media $p \in (0,1)$ la probabilidad $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ decae en realidad mucho más rápido si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

a. Muestre que para todo $t > 0$,

$$\left\{\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right\} = \left\{e^{t(S_n - np - n\varepsilon)} \geq 1\right\}.$$

Verfique que

$$\mathbf{1}_{\left\{e^{t(S_n - np - n\varepsilon)} \geq 1\right\}}(\omega) \leq e^{t(S_n(\omega) - np - n\varepsilon)}$$

y pruebe usando lo anterior y la ley de S_n que para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nt(p+\varepsilon)}(1 - p + pe^t)^n = e^{-n(t(p+\varepsilon) - \ln(1-p+pe^t))}$$

b. Deduzca que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh(\varepsilon)},$$

con $h(\varepsilon) := \sup_{t>0}(t(p+\varepsilon) - \ln(1-p+pe^t))$. (Nota: Si por casulidad Ud. conoce algo de análisis convexo, notará que h es una conjudada de Fenchel...)

c. Observe que si $h(\varepsilon) > 0$, lo anterior implica que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right)$ decrece exponencialmente. Se probará a continuación que para $\varepsilon \in (0, 1-p)$, se cumple que

$$h(\varepsilon) = (p+\varepsilon)\ln\frac{p+\varepsilon}{p} + (1-p-\varepsilon)\ln\frac{1-p-\varepsilon}{1-p} > 0.$$

Para esto, considere la función $g(t) = t(p+\varepsilon) - \ln(1-p+pe^t)$. Pruebe que $g(0) = 0$ y que $g'(0) = \varepsilon > 0$ y deduzca que $h(\varepsilon) > 0$ por ser un supremo. Luego, pruebe que $g(t)$ alcanza su máximo en $t = \ln\frac{(p+\varepsilon)(1-p)}{p(1-p-\varepsilon)}$ y obtenga el valor de $h(\varepsilon)$.

d. Aplicando el resultado anterior a $X'_n = 1 - X_n$, deduzca que también se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) \leq e^{-nh(-\varepsilon)}.$$

Concluya que para todo $\varepsilon \in (0, \min\{p, (1-p)\})$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh(\varepsilon)} + e^{-nh(-\varepsilon)},$$

y que por tanto, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ decrece exponencialmente.

e. Como ejemplo, verifique que la probabilidad de que al lanzar 100 veces una moneda equilibrada se obtengan 60 caras es menor que $0,14$. Verifique luego que la probabilidad de que en 1000 lanzamientos se obtengan más de 600 caras es menor que $2 \cdot 10^{-9}$.....

Nota: El resultado anterior se generaliza a v.a. X_n con "momentos exponenciales": $\mathbb{E}(e^{t|X_n|}) < \infty$ para cierto $t > 0$ para todo n. Existe una relación profunda entre este tipo de resultados, el analisis convexo, mecánica estadística, el cáculo de la prima que debe cobrar una compañia de seguros para acotar la probabilidad de pérdidas,... esto se estudia en un area de probabiliades llamada "teoría de grandes desvíos".

16. Un frasco de medicamentos contiene inicialmente m píldoras grandes y n píldoras pequeñas. Cada dia el paciente dueño del frasco escoge una píldora al azar. Si una píldora pequeña es escogida el paciente la toma. Si una píldora grande es escogida, el paciente la parte por la mitad, toma una de ellas y la otra, que ahora se considera pequeña, la devuelve al frasco.

i. Sea X el número de píldoras pequeñas en el frasco después de que la última píldora grande fue escogida y la mitad pequeña que el paciente no tomó fue devuelta al frasco. Calcule $\mathbb{E}(X)$.
Hint: Defina $n+m$ indicatrices, una por cada píldora pequeña presente en frasco al inicio y una por cada píldora pequeña que se creará al partir una grande.

ii. Sea Y esl día en el que la última píldora grande es escogida. Calcule $\mathbb{E}(Y)$

17. Supongamos un juego con $n+1$ participantes. Cada persona independientemente, es un ganador con probabilidad p. Los ganadores comparten el premio total de 1 unidad. (Por ejemplo, si ganan 4 personas cada uno recibe $1/4$, mientras que si no hay ganadores, ningún jugador recibe nada). Sea A un jugador en particular y sea X el monto recibido por A.
    i. Calcule el premio total esperado compartido por los jugadores.
    ii. Argumente que:
    $$\mathbb{E}(X) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{n+1}$$
    iii. Calcule $E(X)$ condicionando con respecto a si A es o no el ganador y concluya que:
    $$\mathbb{E}((1+B)^{-1}) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$
    Donde B es una v.a. binomial de parámetros n y p.

18. Sea $U_1, U_2, \ldots$ una secuencia de v.a. uniformes en $(0,1)$. Sea:
    $$N(x) = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > x\right\}$$
    i. Muestre por inducción en n que para $0 < x \leq 1$ y para todo $n \geq 0$:
    $$\mathbb{P}(N(x) \geq n+1) = \frac{x^n}{n!}$$
    Hint: Primero condicione sobre U_1 y luego utilice la hipótesis de inducción.
    ii. Utilice la parte anterior para probar que:
    $$\mathbb{E}(N(x)) = e^x$$