MA3401-1: Probabilidades
Universidad de Chile — Profesor Joaquín Fontbona T.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — P. Aux. Héctor Olivero Q.
Departamento de Ingeniería Matemática — Semestre Primavera, 2009

CLASE AUXILIAR 11: LEYES CONDICIONALES Y LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

P1. Se sabe que un átomo individual del isótopo radioactivo Carbono 14 (C14), después de haberse constituido o sintetizado, se degrada tras un "tiempo de vida" aleatorio, que tiene ley exponencial de parámetro λ. Al hacerlo, se transforma en un átomo estable de Carbono "usual" (C12) . Además, la desintegración de un átomo no tiene ninguna influencia sobre átomos próximos.

Por otro lado, es sabido que cada organismo vivo absorbe constantemente átomos de C14, de forma tal que la razón entre la cantidad de átomos de este isótopo y la cantidad total de átomos de Carbono que porta (es decir, C12 más C14) es constante durante su vida e igual a un número $\alpha \in (0,1)$ conocido. Sin embargo, cuando muere, ya no absorbe más C14, y la proporción de C14 comienza a disminuir debido a la degradación de los átomos de isótopo.

a. Se estudia el tejido de un organismo muerto hace mucho tiempo. Explique por qué es razonable suponer, en base a todo lo anterior, que todos los átomos de C14 hayados en el presente en este tejido (es decir, aquellos que no se han degradado todavía) fueron sintetizados en el momento de la muerte del organismo.

b. En base a lo anterior, y suponiendo que la cantidad de átomos de C14 en el tejido es muy grande, muestre que la proporción $\beta \in (0,1)$ de átomos de C14 que no se han desintegrado (entre el total del átomos de C14 presentes en el momento de la muerte) es, pasado un tiempo t desde la muerte del organismo, aproximadamente igual a $e^{-\lambda t}$.
Ind: Suponga que hay infinitos átomos de C14 presentes en el momento de la muerte del organismo, y "enumerelos". Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ los tiempos de "vida" de cada uno de ellos. Note entonces que si se consideran "los n primeros átomos de C14" de la lista, la proporción de ellos que no se han desintegrado transcurrido un tiempo t es
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i>t\}}.$$

c. Se calcula la masa total de Carbono del tejido, siendo esta igual a m. Por otro lado, se determina que la masa de C14 en el mismo tejido es m'. Hace cuánto tiempo murió el organismo estudiado? (Asuma que la diferencia de masa entre átomos de C12 y C14 es despreciable) R: $\frac{\ln(\frac{m'}{\alpha m})}{-\lambda}$)
Nota: el tiempo tal que $\beta = \frac{1}{2}$ se llama "vida media" del isótopo.

P2. Sean $X_1, X_2, ...$ la cantidad de público que llega a un cine nuevo con 5 salas en los días $1, 2, ...$ Se considera que X_i se modelan bien por v.a. de Poisson independientes de parámetro λ.

a. Dos meses después de la inauguración, han venido 30.000 personas. Estime λ.
b. El cine deberé cerrar si el público total durante el próximo año es menor a 100000 personas. Estime la probabilidad de que esto ocurra.

P3. Consideremos una sucesión de variables aleatorias exponenciales $\{X_i\}_{i\geq 0}$ todas independientes e identicamente distribuidas de parámetro λ y consideremos también una variable aleatoria geométrica G de parámetro p.

Calcule:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{G} X_i > s\right)$$

P4. Considere una partición del intervalo $[0, 1]$ dada por los puntos $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$, en donde el subintervalo $[a_{i-1}, a_i)$ tiene largo $p_i = a_i - a_{i-1}$. Se define la entropía de esta partición por:

$$h = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes con distribución uniforme $[0, 1]$. Sea $Z_m(i)$ la cantidad de variables aleatorias en el conjunto $X_1, ..., X_m$ que están en el intervalo $[a_{i-1}, a_i)$. Sea:

$$R_m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}$$

Se probará que:

$$\frac{1}{m}\ln(R_m) \Rightarrow -h \quad c.s.$$

Para esto, siga los siguientes pasos:

a. Se define $I_{ij} = \mathbb{1}_{[a_{i-1},a_i)}(X_j)$. Exprese $Z_m(i)$ como suma de variables I_{ij}.
b. Defina $Y_j = \sum_{i=1}^{n} I_{ij} \ln p_i$ y pruebe que $\frac{1}{m}\ln(R_m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$.
c. Concluya.