MA3401-1: Probabilidades
Universidad de Chile — Profesor Joaquín Fontbona T.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — P. Aux. Héctor Olivero Q.
Departamento de Ingeniería Matemática — Semestre Primavera, 2009

GUIA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Problemas

1. Se quiere estimar la población total N de cierta especie animal en un ecosistema. Para esto, se captura primero un número r de ellos, y se marcan. Después de un año, se captura una cantidad n. Sea X el número de animales que en la segunda captura están marcados. Calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Se estimará a continuación el número N de la manera siguiente: suponga que se capturaron $X = k$ animales marcados. Entonces, un estimador de N sera el número $\hat{N}$ que hace más probable ese valor dado de X. (Esto es lo que en estadística se llama un "estimador de máximo de verosimilitud"). Encuentre $\hat{N}$. Compare el resultado con la idea intuitiva de que la proporción de animales marcados entre aquellos capturados debería ser la misma que en la población total. Estime N si $r = 50$, $n = 40$, y se obtuve $k = 4$.
   (R1: suponiendo cualquier grupo de n animales es equiprobable, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. R2: $\hat{N} = \lfloor \frac{rn}{k} \rfloor$. R3: el valor estimado de N es el mismo, lo que da una interpretación matemática a esa intuición. R4 : 500).
2. Suponga que el número X de clientes que llegan a hacer un trámite al banco en cierto rango horario es un una v.a. de Poisson de parámetro λ. Suponga que con probabilidad p cada cliente que llega es hombre. Pruebe que el número Y de clientes hombres que llegan en ese rango horario es una variable de Poisson de parámetro λp. (Indicación: calcule primero $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$ para $k \leq n$).
3. Si durante 50 semanas Ud. compra un ticket para una rifa semanal, en la cual tiene probabilidad 0,01 de ganar un premio. Calcule utilizando una aproximación la probabilidad de ganar (a) al menos una vez, (b) exactamente una vez, (c) al menos tres veces.
   R: (a) 0,39346, (b) 0,30326, (c) 0,01438
4. Sean X e Y dos v.a. de Poisson independientes, de parámetros λ y γ respectivamente. Pruebe que $X+Y$ es una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda+\gamma$. (Ind: note que $\{X+Y = n\} = \cup_{k=0}^{n}\{X = k\}\cap\{Y = n-k\}$, con $\{X = k\}$ y $\{Y = n-k\}$ eventos independientes.)
5. Dada la siguiente función de distribución

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & 3 \leq b \end{cases}$$

de cierta v.a. X, calcular $\mathbb{P}(X = a)$, para $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$, y $\mathbb{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$. Es X una v.a. discreta, continua? R: $0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$. Ninguna de las dos.

6. Pruebe que una v.a. aleatoria X discreta tiene ley Geométrica ssi no tiene memoria, es decir, para todo natural $m, n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X > m + n | X > n) = P(X > m).$$

7. Considere un triangulo rectangulo generado de manera aleatoria de la forma siguiente: un cateto tiene largo fijo igual a 1, y ángulo adyacente que no es recto es una v.a. uniforme en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pruebe que el largo del otro cateto es una v.a. continua y encuentre su función de distribución y densidad. (R: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctan(x)$, $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Obs: esta ley se llama "ley de Cauchy").
8. a) Se escoge al azar un punto en una linea de largo L de manera uniforme, que la divide en dos segementos. Encuentre la probabilidad de que la razón entre el segmento más largo y el más corto sea menor que $\frac{1}{4}$. (Ind.: si X es el punto escogido, particione el evento mencionado según si X o $L - X$ es el más largo de los segmentos). (R: $\frac{2}{5}$.)
   b) Pruebe que si X es v.a. exponencial de parámetro λ, entonces para todo $c > 0$ cX también es v.a exponencial, y encuentre su parámetro (R: $\frac{\lambda}{c}$).
9. a. Sea X una v.a. continua densidad f. Sea $Y := \alpha X + \beta$, con $\alpha \neq 0$. Muestre que Y es una v.a. continua y encuentre su densidad.
   b. Sea X una v.a. exponencial de parámetro 1. Encuentre la distribución de la v.a. Y definida por $Y = \ln X$, y su densidad si esta existe.
   c) Sea X una v.a. normal de parámetros μ is σ^2. Se dice que la v.a. $Y := e^X$ tiene entonces ley "log-normal". Muestre que Y tiene densidad y encuentrela. (R: $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.)
10. Se define una v.a. X de la manera siguiente. Se lanza un dado. Si el resultado es menor o igual que 2, entonces ese será el valor de X. Si el resultado del dado es 3 o 4, se escoge un número uniformemente en $[0, 1]$, a este se le suma 2,5 , y el resultado obtenido será el valor que se da a X. Si el resultado del dado es $k = 5$ o $k = 6$, se considera una v.a. exponencial de parámetro k, se le suma 5 al valor que se obtenga de ella, y ese será el valor de X. Encuentre la función de distribución F_X. (Ind.: si Z es la v.a. correspondiente al resultado del dado, encuentre la función $y \mapsto \mathbb{P}(X \leq y | Z = k)$ para cada $k = 1, ..., 6$ y luego pruebe y use el hecho que $F_X(y) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X \leq y | Z = k)$.) (R:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \leq x < 2{,}5 \\ \frac{1}{3} + \frac{x-2{,}5}{3} & 2{,}5 \leq x < 3{,}5 \\ \frac{2}{3} & 3{,}4 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(1 - e^{(x-5)5}) & 4 \leq x < 5 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(1 - e^{(x-5)5}) + \frac{1}{6}(1 - e^{(x-5)6}) & x \geq 5. \end{cases}$$

)

11. a. Sea $X \sim \mathcal{N}(3, 9)$. Usando el hecho que la función de distribuciíon Φ de $\mathcal{N}(0, 1)$ satisface $\Phi(2) \approx 0{,}0456$, calcule $\mathbb{P}(|X - 3| > 6)$.
   b) Se afirma que la cantidad de milímetros de lluvia caidos en cierta región cada año sigue una ley normal de media $\mu = 40$ y varianza $\sigma^2 = 16$. a) Porqué esta afirmación sólo puede ser una "aproximación" de la verdadera ley de la v.a. correspondiente al agua caida (ver d))? Suponiendo que esta aproximación es razonable, b) cuál es la probabilidad de que tome al menos 10 años para que en un año caigan al menos 50 mm.? Suponga que la cantidad de agua que cae en un año no tiene influencia con la de los otros años. d) Cuál es la probabilidad de que caiga una cantidad negativa de agua un año dado?
   c) Un fabricante de alumnio fabrica láminas cuyo espesor especificado es de "$0{,}9 \pm 0{,}005$" mm, pero este varia ligeramente en cada una. Suponiendo que el espesor se aproxima razonablemente por una v.a. aleatoria una ley normal de parámetros $\mu = 0{,}9$ mm y $\sigma = 0{,}003$ mm, cuál es la probabilidad de que el espesor de una lámina fabricada no esté en el rango especificado? Ind: $\Phi(1{,}66) = 0{,}9515$, $\Phi(1{,}67) = 0{,}9525$.) (R: $\approx 0{,}096$.)
12. Una empresa vende ácido sulfúrico para lo cual debbe decidir cada mes la cantidad s de litros que comprará para vender ese mismo mes. Cada litro es vendido en b pesos, y por cada litro no vendido incurre en un costo de l pesos. Suponga que la cantidad demandada de ácido el próximo mes es una v.a. X positiva con densidad $f(x)$.
   a) Exprese la ganancia neta de la empresa al final del mes en función de s y de la v.a. X.
   b) Pruebe que la ganancia neta esperada se maximiza comprando inicialmente s^* litros de ácido, donde s^* es solución de

$$\int_0^{s^*} f(x)dx = \frac{b}{b+l}.$$

13. N personas mezclan sus abrigos y sacan uno del al azar. Decimos que hay una coincidencia si una persona obtuvo el suyo propio. Pruebe que el número esperado de coincidencias es 1. Ind: Defina X_i como la indicatriz del evento "la persona i sacó su propio abrigo" y usela para expresar el número de coincidencias.
14. *Sobre la ley Gamma* Sean $\lambda, \theta > 0$ números reales fijos y

$$f^{\lambda,\theta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \lambda^\theta e^{-\lambda x} x^{\theta-1} \mathbf{1}_{x>0},$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\theta-1} dx$.
   a. Muestre que $f^{\lambda,\theta}$ es una densidad de probabilidad. Se dice que una v.a. X con esta densidad tiene ley Gamma de paráemtros (λ, θ).
   b. Sean X e Y v.a. independientes con leyes Gamma de parámetros (λ, θ_1) y (λ, θ_2) respectivamente. Pruebe que $X + Y$ tiene ley gamma de parámetros $(\lambda, \theta_1 + \theta_2)$. (Ind.: muestre que $X + Y$ tiene densidad

$$C\lambda^{\theta_1+\theta_2} e^{-\lambda x} x^{\theta_1+\theta_2-1} \mathbf{1}_{x>0}$$

para cierta constante C y explique cuál debe ser el valor de la constante y por qué.)

15. Sean X_1, X_2 dos v.a. exponenciales independientes de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente.
   a. Pruebe que $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = 0$.
   b. Definimos a partir de ellas las siguientes variables aleatorias:
   $$Z = \text{mín}\{X_1, Y_2\}$$
   y
   $$K = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 < X_2 \\ 2 & \text{si } X_2 < X_1 \end{cases}$$
   Por ejemplo, si X_1 y X_2 representan respectivamente el tiempo que tarda en pasar la micro de recorrido 1 y 2, Z dice cuándo pasó la primera de ellas, y K nos dice cuál de ellas fue la primera.
   c. Verifique que
   $$\mathbb{P}\{Z > s, K = 1\} = \mathbb{P}\{X_2 > X_1 > s\} \text{ y } \mathbb{P}\{Z > s, K = 2\} = \mathbb{P}\{X_1 > X_2 > s\}$$
   d. Calcule $\mathbb{P}\{Z > s, K = i\}$ y deduzca que
   $$\mathbb{P}\{Z \leq s, K = i\} = (1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s})\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
   e. Deduzca de la fórmula anterior que Z es una v.a. aleatoria exponencial de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$, que K es una v.a. a valores en $\{1, 2\}$ con $\mathbb{P}\{K = i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$ para $i = 1, 2$, y que estas dos v.a. son independientes.
   En el ejemlpo, esto último nos dice que "cuánto tiempo se demoró en pasar la primera micro" es independiente de "cuál micro pasó primero".
16. a. Sean (X_1, X_2) v.a. conjuntamente continuas con densidad f_{X_1,X_2}. Calcule en función de f_{X_1,X_2} la densidad del par de v.a. $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.(Cuál es la intepretación geométrica de estas nuevas variables?). Deduzca que si (X_1, X_2) son dos v.a. normales centradas reducidas (es decir, con media 0 y varianza 1) independientes, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ también lo son.
   b. Sean U_1 , U_2 v.a. independientes, ambas con ley uniforme en $[0, 1]$. Pruebe que las v.a. (X_1, X_2) defindas por
   $$X_1 := \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$
   y
   $$X_2 := \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$
   son dos v.a. normales centradas reducidas independientes. (Nota: un computador es capaz de generar de maner sencilla sólo v.a. uniformes independientes. Con la fórmula anterior se pueden generar a partir de ellas v.a. Gaussianas).