MA3401-1: Probabilidades
Universidad de Chile — Profesor Joaquín Fontbona T.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — P. Aux. Héctor Olivero Q.
Departamento de Ingeniería Matemática — Semestre Primavera, 2009

INDICACIONES GUIA 2: ESPACIOS EQUIPROBABLES

1. Indicaciones

Problemas:

1. R1:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$$

R2: $1/n$

3. Fijemos k personas de las N. Queremos que estas k personas reciban sus sombreros, y nadie más, asíque hay que asignar a las otras $N-k$ personas los $N-k$ sombreros restantes de manera que nadie reciba el suyo.

Se vió en clases que la probabilidad de que de un grupo de n personas, ninguna reciba su sombrero es

$$1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-....+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}).$$

Luego , la probabilidad de que las $N-k$ perseonas que queremos no reciba ninguna su sombrero es

$$1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-....+\frac{(-1)^{(N-k+1)}}{(N-k)!}),$$

y por lo tanto, el número de formas en que se pueden repartir $N-k$ sombreros entre ellos es

$$(N-k)!\left(1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-....+\frac{(-1)^{(N-k+1)}}{(N-k)!})\right),$$

(la probilidad anterior multiplicada por el número total de formas de repartir $N-k$ sombreros entre $N-k$ personas).

Multiplicando lo anterrior por $\left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right)$ (que son todas las maneras de escoger k personas que serán las únicas en recibir su propio abrigo) obtenemos el número de formas en que exactamente k personas reciben su abrigo. Esto, dividido por $N!$ nos da la probabilidad buscada, es decir

$$\frac{1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-....+\frac{(-1)^{(N-k+1)}}{(N-k)!}}{k!}.$$

7.
a)

$$\frac{(8!)^2}{64^8}$$

b) R1: Simplemente $\frac{4}{52}$, es decir la probabilidad de que la primera (o cualquier otra sea un as). Pienselo de la manera siguiente: suponga que los ases son las cartas $1,2,3$ y 4. Nos interesa saber cuantas tuplas de largo 14 con coordenadas que son elementos distintos de $\{1,..,52\}$ tienen un $1,2,3$ o un 4 en la coordenada 14. Estas son exactamente la misma cantidad que las que tienen un $1,2,3$ o 4 en la coordenada 1. En efecto, a cada tupla de largo 13 de coordenadas distintas que no contienen a los 4 ases, podemos "colgarle" un as al comienzo o al final, lo que nos da una biyección entre entre tuplas que terminan con as y las que comienzan con as.

R2:

$$\frac{48 \times 47 \times ... \times (48-13) \times 4}{52 \times 51 \times ... \times (52-13)(52-14)}$$

8. R: $\frac{1}{3}$.
9. Primero notemos que $P(E_2) = P(E_3) = P(E_{12}) = 0$ y $P(E_7) = P(\text{obtiene 7 en la primera }) = \frac{1}{6}$. Calculemos los demás $P(E_i)$. La identidad $P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_{i,n})$ se obtiene directamente del hecho que los eventos $G_n =$"el jugador gana en la $n-$ésima jugada" son disjuntos para n's diferentes, luego $E_i = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \cap G_n$ donde la unión es disjunta, y por definición, $E_{i,n} = E_i \cap G_n$.

   El cálculo que hay que hacer para cada i restante es el mismo. Sea n_i el número de formas en que se obtiene suma i al lanzar dos dados. Entonces, el número de formas en que el jugador puede ganar en la $n-$ésima jugada sacando $i \neq 2, 3, 12, 7$ (fijo) en la primera

$$(36 - n_i - n_7)^{n-2} \times n_i,$$

   es decir no sacar ni i ni 7 en las jugadas $2, ..., n-1$ e i en la $n-$ésima.

   El número total de resultado posibles para las n primeras jugadas es 36^n. Notamos ahora que $n_i = i - 1$, luego,

$$P(E_{i,n}) = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{31-i}{36})^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{31-i}{36})^{n}$$

   que es una serie geométrica. Completar el cálculo se deja propuesto.
12. La probabilidad de no obtener un doble 6 en n lanzamietos de dos dados es $(\frac{35}{36})^n$, luego queremos n tal que $1 - (\frac{35}{36})^n \geq \frac{1}{2}$, o sea

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{35}{36}}.$$