

Guia 1: Combinatoria

7 de agosto de 2009

Problemas

1. Probar que para todo $n \geq 4$,

$$\binom{n+1}{4} = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{2}}{3}$$

Ind.: considere un grupo de n objetos de los cuales uno es especial y cuente de dos maneras el número de subconjuntos de tamaño 4.

2. Usando argumentos combinatoriales pruebe que:

$$\binom{n}{n_1, n_1, \dots, n_r} = \binom{n-1}{n_1-1, n_1, \dots, n_r} + \binom{n-1}{n_1, n_1-1, \dots, n_r} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_1, \dots, n_r-1}$$

3. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles selecciones de un comité y un jefe del comité, muestre que

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

4. ¿Cuántas derivadas de orden r tiene una función $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables?

5. Pruebe que

$$\binom{n+r}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{j+r-1}{j}$$

Ind.: Cuente el número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \dots + x_r \leq n$.

6. De cuantas maneras se pueden sentar 8 personas en una fila si
- no hay restricción de ningún tipo.
 - Fulano y Mengano no quieren quedar juntos.
 - Hay 4 hombres y 4 mujeres y no pueden quedar 2 hombres seguidos al lado de 2 mujeres seguidas.

- d. Hay 5 mujeres y tienen que quedar todas juntas.
 - e. Hay 4 parejas y todas quieren quedar sentados juntos.
7. ¿Cuántas piezas tiene un “dominó generalizado” con marcas que van de 0 a N ?
8. Cinco premios (mejor alumno, mejor compañero, mejor deportista, etc...) serán repartidos a 30 alumnos de una clase. De cuántas maneras se puede hacer esto si:
- i. Cada estudiante puede recibir hasta los 5 premios.
 - ii. Cada estudiante puede recibir a lo más 1 premio.
9. Un ascensor parte del primer piso con 8 personas excluyendo el ascensorista, y llegado al piso 7 no queda ningún pasajero. Suponga que no subió nadie más. Si al ascensorista todas las personas les parecen iguales calcule de cuántas formas puede él haber percibido que la gente bajaba del ascensor. ¿Y si el ascensorista se fijó en que las 8, 5 son hombres y 3 mujeres?.
10. En una competencia de ciclismo por países compiten 3 brasileros, 4 argentinos, 2 uruguayos y 1 chileno. Si el puntaje sólo toma en cuenta los países que los competidores representan, de cuántas maneras puede terminar la competencia? De cuántas formar puede ocurrir que de los 3 brasileros haya uno en los tres primeros puestos y 2 en los últimos 3?
11. Un inversionista tiene que invertir 20 millones de pesos en 4 fondos, A,B,C y D. Cada colocación debe ser en unidades de millones de pesos, y los fondos exigen cada uno una inversión mínima de 2, 2, 3 y 4 millones, respectivamente. Cuántas estrategias de inversión diferentes hay si:
- a. Hay que invertir en algo en todos los fondos.
 - b. Se debe invertir en al menos 3 de los 4 fondos.
12. Pruebe la fórmula del multinomio

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

donde la suma es sobre todas las r -tuplas (n_1, \dots, n_r) de enteros no negativos tales que $n_1 + \dots + n_r = n$.