Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2601 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 09-1

Pauta Control 1

P1. (a) $y' = 2^{x+y} = 2^x 2^y$ (variables separables).

Solución:

$$\int 2^{-y} dy = \int 2^x dx + c \to \int \frac{dy}{e^{y\ell n2}} = \int e^{x\ell n2} + c$$

$$\to -\frac{1}{\ell n2} e^{-y\ell n2} = \frac{1}{\ell n2} e^{x\ell n2} + c$$

$$\to e^{-y\ell n2} = -e^{x\ell n2} - c\ell n2$$

$$-y\ell n2 = \ell n(-c\ell n2 - 2^x)$$

$$y = \frac{\ell n(-c\ell n2 - 2^x)^{-1}}{\ell n2}$$

(1.2 puntos)

(b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x \ / \ e^{+\sin x}$ (factor integrante).

Solución:

$$\begin{aligned}
(ye^{+\sin x})' &= e^{+\sin x}\sin x\cos x \\
ye^{+\sin x} &= \int e^{+\sin x}\sin x \cos x dx + c \qquad \text{(c.v. } u = \sin x) \\
&= \int e^{+u} u du + c \qquad \text{(por partes)} \\
y &= ce{-}\sin x + (-\textstyle\int e^{+u} du + e^{du}u)|_{u=\sin x} e^{-\sin x}
\end{aligned}$$

$$y = ce^{-\sin x} + (\sin x - 1)$$

(1.2 puntos)

(c) $(y')^2 = yy''$ (no aparece la variable dependientes)

Solución:

$$\begin{aligned}
p &= y', \qquad \frac{dp}{dy}p = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dt} = y'' \\
p^2 &= yp\frac{dp}{dy} \to \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} \to \int \frac{dp}{p} = \int \frac{1}{y} + c \\
\ell n|p| &= \ell n|y| + c \to p = ky \to y' = ky \to
\end{aligned}$$

$$y = ce^{kt}$$

(1.2 puntos)

(d) $xy' + y = y^{-2}$ (Bernoulli)

Solución:

$$\begin{aligned} &z = y^{1-(-2)} = y^3 \Rightarrow z' = 3y^2y' \\ &xy' + y = y^{-2} / \cdot 3y^2 \\ &x3y^2y' + 3y^3 = 3 \to \underbrace{xz' + z = 1}_{\text{lineal}} \to (xz)' = 1 \to xz = x + c \end{aligned}$$

$$\to z = 1 + \frac{c}{x} \to y = \sqrt[3]{1 + \frac{c}{x}}$$

(1.2 puntos)

(e)

Solución:

Caso b) $\begin{cases} y' + y\cos x = \sin x \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(PC) $\begin{cases} y' = -y\cos x + \sin x \cos x = f(x,y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

$f(x,y)$ es continua en ambas variables y Lipschitz c/r a la segunda variable, en efecto:

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |(y-z)\cos x| \leq |y - z|$$

(de hecho es globalmente Lipschitz) con constante $L = 1$.
De manera que se aplica el Teo. de existencia y unicidad local (y global). (0.6 puntos)

Caso d) $\begin{cases} xy' + y = y^{-2} \\ y(1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{xy^2} = f(x,y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

En este caso la función $f(x,y)$ es continua en $x = f$ pero no es Lipschitz en una vecindad de $y = 0$, esto es porque $\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \to +\infty$ si $y \to 0$, de modo que la derivada no está acotada. (0.6 puntos)

P2. (a)

Solución:

$\begin{cases} y' = \frac{x-y}{1-(x+y)} \text{ pendiente de la recta (línea punteada)} \\ y(0) = 0 \text{ (parte de origen)} \end{cases}$ (1.0 puntos)

c.v.1. $\begin{aligned} w(x) &= y(1-x) \\ w'(x) &= -y'(1-x) = -\frac{(1-x)-y}{1-(1-x+y)} \end{aligned}$ de donde

$$w' = \frac{x + w - 1}{x - w}$$

(1.0 puntos)

c.v.2. $t = x - \frac{1}{2}$, $v = w - \frac{1}{2}$. Notar que $v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dx} = w'$

$$v' = \frac{t + \frac{1}{2} + v + \frac{1}{2} - 1}{t - v}$$

$$(*) \qquad v' = \frac{t+v}{t-v}$$

(1.0 puntos)

(b)

Solución: La EDO (*) es homogénea, haciendo el cambio $z = \frac{v}{t}$ esto es:

$$tz = v \to tz' + z = v' = \frac{1 + \frac{v}{t}}{1 - \frac{v}{t}} = \frac{1+z}{1-z}$$

(0.5 puntos)

Se llega a la EDO a variables separables:

$$\begin{aligned} tz' &= \tfrac{1+z}{1-z} - z = \tfrac{1+z-z+z^2}{1-z} = \tfrac{1+z^2}{1-z} \\ z' &= \tfrac{1}{t}\left(\tfrac{1+z^2}{1-z}\right) \to \int \tfrac{1-z}{1+z^2} dz = \int \tfrac{1}{t} + c \end{aligned}$$

de donde:

$$\text{arttan } (z) - \ell n\sqrt{1+z^2} = \ell n k|t|, \quad k \text{ cte.}$$

(1.0 puntos)

reemplazando

$$z = \frac{y(1-n) - 1/2}{x - 1/2}$$

(0.5 puntos)

Para evaluar la constante, suponemos que $y(0)$, o sea $w(1) = 0$ esto es $v(t = \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ o sea $z(t = \frac{1}{2}) = -1$

$$\begin{aligned} \text{arctan } (-1) - \ell n\sqrt{1 + (-1)^2} =& \ell n \frac{k}{2} \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ell n 2 =& \ell n k - \ell n 2 \\ \Rightarrow \ell n k =& \frac{1}{2}\ell n 2 - \frac{\pi}{4} \\ k =& \sqrt{2} \cdot e^{(-\pi/4)} \end{aligned}$$

(1.0 puntos)

P3. $P' = P(1-P) - H$

(a)

Solución: Para obtener las soluciones constantes, basta resolver ($P' = 0$)
$P(1-P) - H = 0$
$P^2 - P + H = 0$
$P^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4H}}{2}$

si $H < \frac{1}{4}$ hay dos soluciones $P^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4H}}{2}$ reales.
si $H = \frac{1}{4}$ hay una solución $P^* = \frac{1}{2}$ real.
si $H > \frac{1}{4}$ no hay una solución real P^* (son complejas). (2.0 puntos).

(b)

Solución:
Hacemos el c.v. $P = \frac{1}{z} + P^*$ (Riccati) sabiendo que $P^*(1-P^*) - H = 0$.
Se obtiene

$$\left(\frac{1}{z} + P^*\right)\left(1 - \left(\frac{1}{z} + P^*\right)\right) - H = \left(\frac{1}{z} + P^*\right)'$$

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= \left(\frac{1}{z} + P^*\right)\left(1 - P^* - \frac{1}{z}\right) - H \\ &= -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}(1 - P^* - P^*) + \underbrace{P^*(1-P^*) - H}_{0} = 0 \end{aligned}$$

$$z' = 1 - z(1 - 2P^*) \qquad \text{(EDO lineal)}$$

(1.0 puntos).

Resolviendo (notar que $1 - 2P^* \neq 0$ pues $H < \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned} z' + z(1-2P^*) &= 1 \quad /e^{(1-2P^*)t} \\ (ze^{(1-2P^*)t})' &= e^{(1-2P^*)t} \\ ze^{(1-2P^*)t} &= \frac{1}{1-2P^*}e^{(1-2P^*)t} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{z = ce^{-(1-2P^*)t} + \frac{1}{1-2P^*}}$$

(1.0 puntos).

de donde, como $z = \frac{1}{P - P^*}$,

$$\frac{1}{P - P^*} = ce^{-(1-2P^*)t} + \frac{1}{1-2P^*}$$

evaluando la constante $P(0) = P_0 \neq P^*$

$$c = \frac{1}{P_0 - P^*} - \frac{1}{1 - 2P^*}$$

(1.0 puntos)

se obtiene

$$\frac{1}{P - P^*} = \frac{1}{P_0 - P^*}e^{-(1-2P^*)t} + \frac{1}{1-2P^*}(1 - e^{-(1-2P^*)t})$$

$$P = P^* + \frac{1}{\frac{1}{P_0 - P^*} e^{-(1-2P^*)t} + \frac{1}{1-2P^*}\left(1 - e^{-(1-2P^*)t}\right)}$$

(1.0 puntos).