Control 1 MA2601 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2009-1

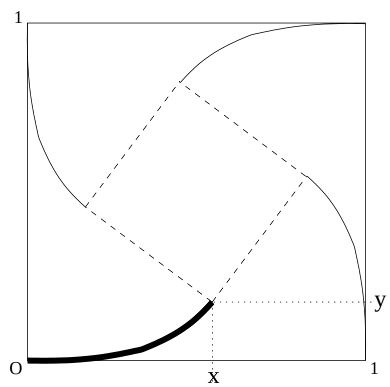
Profs. F. Alvarez, A. Osses

P1.- Resuelva las siguientes EDO

(a) $y' = 2^{x+y}$ (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ (c) $(y')^2 - yy'' = 0$ (d) $xy' + y = y^{-2}$

(e) En los casos (b) y (d), si se agrega la condición $y(1) = 0$, verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad local para el problema de Cauchy.

P2.- *(Carrera de caballos)* Cuatro caballos parten en una carrera de las cuatro esquinas de un cuadrado de lado 1. Los caballos tienen la misma velocidad y siguen siempre al caballo siguiente en el sentido contrario de los punteros del reloj. La idea es determinar el comienzo de la curva $y = y(x)$ que describe el caballo que parte del origen, en la esquina inferior izquierda.



(a) (3 ptos) Suponga que $y < x$ como en la figura. Usando la simetría del problema, exprese y' en función de x e y y obtenga una EDO con condición de borde. Haciendo primero el cambio de variables $w(x) = y(1-x)$ y luego el cambio $t = x - 1/2$, $v = w - 1/2$ encuentre la ecuación:

$$v' = \frac{t+v}{t-v}. \qquad \text{(Notar que } v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dx} = w'\text{)}.$$

(b) (3 ptos) Resuelva esta EDO y exprese finalmente la solución a la trayectoria del caballo que parte del origen $y = y(x)$ en forma implícita. No olvide evaluar la constante de integración.

P3.- *(Pesca)* Un modelo para estudiar la población $P(t)$ de peces en el tiempo en presencia de pesca es el siguiente:

$$P' = P(1-P) - H$$

donde $H > 0$ representa el nivel de la pesca (constante).

(a) (2 ptos) Explique el modelo y encuentre las soluciones **reales** P^* **constantes** en función de H. ¿Puede ser una, más de una o ninguna?

(b) (4 ptos) Suponga que $H < 1/4$. Haciendo el cambio de variables $P = \dfrac{1}{z} + P^*$, calcule la solución del modelo para una población inicial $P_0 > 0$ con $P_0 \neq P^*$. Nota: puede ser útil definir $\alpha = 1 - 2P^*$.