Clase Auxiliar Cálculo Avanzado y Aplicaciones Prim '08

HR; GI, VR

Series de Fourier

Transformada de Fourier.

Series de Fourier: Se quiere escribir una función $f: [L,L] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{-L}^{L} |f|^2 dx < \infty$,

como
$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{S_f(x)}, \quad \forall x \in [-L,L].$$

Se puede escribir el lado derecho como
$$S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + i c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= c_0 + \sum_{n\geq 1} (c_n + c_{-n}) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n\geq 1} i(c_n - c_{-n}) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

luego, ·) $\frac{a_0}{2} = c_0$

·) $\left.\begin{array}{l} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{array}\right\} \Rightarrow c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \; ; \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n}$

Definiendo $e_k : [L,L] \to \mathbb{C}$ por $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{-k\pi x}{L}}$, tenemos que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base del espacio $L^2([L,L],\mathbb{C}) = \{ f : [L,L] \to \mathbb{C} \;/\; \int_{-L}^{L} |f|^2 dx < \infty \}$, por lo que se puede escribir
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle f, e_n\rangle}_{\overline{c_n}\sqrt{2L} = c_n} e_n, \quad \text{con } \langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L} f\bar{g}\, dx, \quad \|f\| - \int_{-L}^{L} |f|^2 dx$$

Notemos que
$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{\frac{i\pi x}{L}(n-m)} dx$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} 1\, dx \; \mathbb{1}_{\{n=m\}}(n,m) + \frac{1}{2L} \left.\frac{e^{\frac{i\pi x}{L}(n-m)}}{\frac{i\pi(n-m)}{L}}\right|_{-L}^{L} \mathbb{1}_{\{n\neq m\}}(n,m)$$
$$= 1\cdot \mathbb{1}_{\{n=m\}}(n,m) + \frac{1}{2\cancel{L}} \frac{e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}}{\frac{i\pi(n-m)}{\cancel{L}}} \mathbb{1}_{\{n\neq m\}}(n,m)$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi(n-m))}{\pi(n-m)} = 0$$

$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$

$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

Luego,
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2L}^2}\left(\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx + \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{\frac{in\pi x}{L}}dx\right) = \boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n}$$

$$b_n = i\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{\frac{in\pi x}{L}}\right) = \boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

Obs: $\Rightarrow$ f par $\Rightarrow b_n = 0$; f impar $\Rightarrow a_n = 0$

Props. i) $f \in L^2([-L,L],\mathbb{R}) \Rightarrow S_f^N \xrightarrow[L^2]{N\to\infty} f$

ii) f continua por trozos en $[-L,L]$, derivable en $(-L,L)$ y derivada por izq en L, der en $-L$.
Entonces $S_f^N(x) \to f(x)$ $\forall x \in [-L,L] \cap \mathrm{cont}(f)$. Donde f no es continua,
$$S_f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) - f(x^-)\right) \qquad \left(\text{en el borde, } S_f(L) = S_f(-L) = \frac{1}{2}\left(f(-L) + f(L)\right)\right).$$

iii) $f \in \mathcal{C}^1([-L,L])$, $f(L) = f(-L) \Rightarrow S_f = f$ en $[-L,L]$.
$f \in H^1([-L,L]) \Rightarrow S_f^N \xrightarrow{\text{unif}} f$

iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2L$ periódica, $\in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f = S_f$ y S_f^N converge uniformemente a f.
$\Rightarrow$ f diff en $[-L,L] \setminus \{\#\text{finito de puntos}\}$ periódica, f' continua por trozos $\Rightarrow$ Serie de f' = derivar la serie de f term. a termino.

Transformada de Fourier. Formalmente, tomando límites $L \to \infty$,
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iys}dy\right) ds$$

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\in L^1$. Se define la transf. de Fourier de f como
$$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$s \mapsto \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-isy}\, dy \qquad \text{(continua)}$$

Teo [Inversión] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^1$, y $\hat{f} \in L^1$. Si f es continua, entonces
$$f(x) = T^{-1}(\hat{f})(x) = \check{\hat{f}}(x).$$

Def. [AntiFT] $g \in L^1(\mathbb{R})$.
$$\check{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{isx}\, ds.$$

③

Props: i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^1(\mathbb{R})$, con $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, $\widehat{f'}(s) = is\,\hat{f}(s)$ $\left(\Rightarrow \widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)\right)$.

ii) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{(f*g)}(s) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(s)\, \hat{g}(s)$ (por Fubini)

iii) linealidad

iv) $\widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$

v) $\widehat{e^{is_0x} f(x)}(s) = \hat{f}(s-s_0)$

vi) $\widehat{f(x)\cos(w_0x)}(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(s-w_0) + \hat{f}(s+w_0)\right)$

$\widehat{f(x)\,\mathrm{sen}(w_0x)}(s) = \frac{1}{2i}\left(\hat{f}(s+w_0) - \hat{f}(s-w_0)\right)$

vii) $\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

viii) $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$.

Ej:

) $e^{-x} \mathbb{1}_{x>0} + 0\, \mathbb{1}_{x<0} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$

) $e^{-a|x|}$ $\quad a>0 \quad \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+s^2}$

) e^{-ax^2} $\quad a>0 \quad \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$

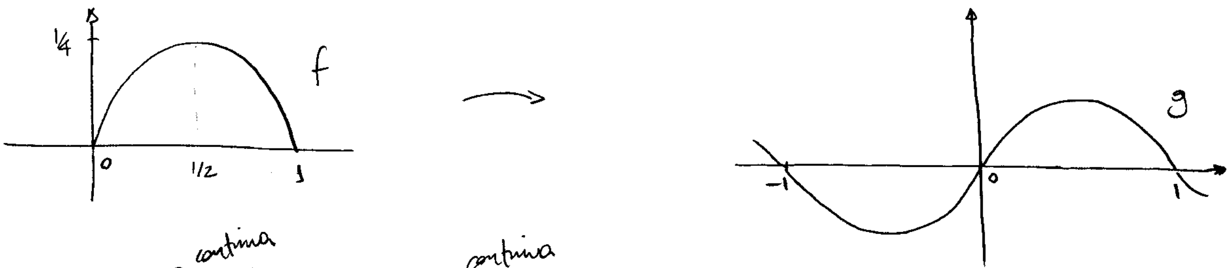
) $\frac{1}{a^2+x^2}$ $\quad a>0 \quad \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|s|}$

) $-k\, \mathbb{1}_{\{|x| \le a\}} + 0\, \mathbb{1}_{\{|x|>a\}} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \frac{\mathrm{sen}(as)}{s}$

Problema 1 Sea f definida en $[0,1]$ por $f(x) = x(1-x)$

a) Se desea considerar la expansión de f en serie de senos. Grafique la extensión de f (sea g dicha extensión) de periodo 2. ¿Es esta serie uniformemente convergente? Puede ser diferenciada término a término.

sol



Como $f \overset{\text{continua}}{\in} L^2([0,1])$, $g|_{[-1,1]} \overset{\text{continua}}{\in} L^2([-1,1])$, y la serie de Fourier converge uniformemente en $[-1,1]$ (g es continua en 1). Luego, la serie de g' se puede obtener vía derivar término a término la serie de g.

b) Calcule la expansión de g.

sol Como g es impar (expansión impar), $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} g(x)\, \text{sen}(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x(1-x)\,\text{sen}(n\pi x)\,dx$$

$u' = x^2,\ du = 2x$

$u = x,\ du = dx$

$dv = \text{sen}(n\pi x)\,dx \to v = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$

$dv' = \cos(n\pi x)\,dx \to v' = \frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi}$

$$= 2\int_0^1 x\,\text{sen}(n\pi x)\,dx - 2\int_0^1 x^2\,\text{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\left(-x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right) - 2\left(-x^2\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(-\cancel{\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}} + \frac{1}{(n\pi)^2}\underbrace{\cancel{\text{sen}(n\pi x)\Big|_0^1}}_{\to 0}\right) - 2\left(-\cancel{\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}} + \frac{2}{n\pi}\left(\underbrace{\cancel{x\frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1}}_{\to 0} - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \text{sen}(n\pi x)\,dx\right)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\int_0^1 \text{sen}(n\pi x)\,dx = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right)\text{sen}(n\pi x)}, \quad x \in [-1,1].$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{4}{(2n+1)^3\pi^3}\,2\cdot\text{sen}((2n+1)\pi x)$$

c) Deduzca de lo anterior que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}' \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

sol Evaluamos donde se pueda. En $x = 1/2$, $g(x) = S_g(x)$. Luego

$$\frac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) = \sum_{n\geq 1}' \frac{4}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$ sobreviven con n impar

$$\frac{\pi^3}{4\cdot 4} = \sum_{k\geq 0}' \frac{2}{(2k+1)^3}(-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0}' \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad //$$

d) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$ y deduzca que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}' \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

sol
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Por otra parte, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)\,dx \overset{\text{conv. unif}}{=} \sum_{n\geq 1}' \frac{4}{(n\pi)^3}(1-(-1)^n)\int_0^1 \mathrm{sen}(n\pi x)\,dx$

$$\frac{1}{6} = \sum_{n\geq 1}' \frac{4}{(n\pi)^3}(1-(-1)^n)\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\Bigg|_0^1 = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{(n\pi)^4}(1-(-1)^n)(1-(-1)^n)$$ sobreviven n impar.

$$\frac{1}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)^4\pi^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad //$$

e) Calcule la expansión en cosenos de $f'(x) = 1-2x$, $x\in[0,1]$, y la expansión de $f''(x) = -2$, $x\in(0,1)$

sol Derivamos la expansión de g en $(0,1)$.

$$f'(x) = S_g'(x) = 8\cdot\sum_{n\geq 0}' \frac{\cos((2n+1)\pi x)\cdot\cancel{(2n+1)}\cdot\cancel{\pi}}{(2n+1)^{\cancel{3}\,2}\pi^{\cancel{3}\,2}}$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}' \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$$

Obs: g' es derivable (al extender f' a todos los reales). Por eso se tiene la igualdad en 0 y 1 de g con S_g.

$$y \quad f''(x) = \frac{8}{\pi^{2}}\sum_{n\geq 0}' \frac{-\mathrm{sen}((2n+1)\pi x)\,\cancel{(2n+1)\pi}}{(2n+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-8}{\pi}\sum_{n\geq 0}' \frac{\mathrm{sen}((2n+1)\pi x)}{(2n+1)} \quad //$$

Obs: g'' no es derivable: $\forall n\in\mathbb{Z}$, g es discontinua en n. Por eso no se tiene la igualdad de f con S_g en 0 y 1.

f) Deducir de es que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Sol Ocupamos la serie de f' en la primera, y la de f en la segunda.

$$f'(1) = 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n\geq 0}{}' \frac{1}{(2n+1)^2}$$ se puede porque g' es continua en 1.

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad //$$

$$f''(1/2) = -2 = -\frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 0}{}' \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = -\frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad //$$

Problema 2

a) Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|}$

b) Calcule la transformada de $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Sol: a) Primero, por definición,

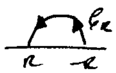
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-isx}\, dx$$

Para resolver esto, se pueden usar herramientas del cálculo de integrales complejas.

Recordemos el teorema:

Teo: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfa en $\mathbb{C}$, $P = \{\text{polos de } f\}$. Supongamos que

- $P \cap \mathbb{R} = \emptyset$
- $|\{\text{semiplano superior}\} \cap P| < \infty$
- $\exists\, K \geq 0,\ M \geq 0,\ p > 0$ tq $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ $\forall z \in \{\text{semiplano superior}\}$, $|z| \geq M$.

Luego, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{isz}\, dz = 0$, $C_R =$  $\forall s > 0$.

y entonces $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{isx}\, dx = 2\pi i \sum_{w \in S \cap P} \operatorname{Res}\left(e^{isz} f(z), w\right)$$

Ahora, pongamonos en casos:

•) $s<0$; $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{itx}\,dx$

$-s=t>0$

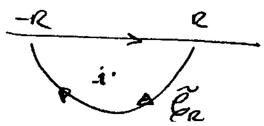
Aquí se aplica el teorema directamente. Los polos de $f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$ son $z=-i, i$, ambos de orden 1.

luego, $Res(f,i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{e^{itz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{e^{i^2t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2i}$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{e^{-t}}{\cancel{2i}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-t} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|}$$

•) $s>0$ $\quad \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-isx}\,dx$. Aquí, no se tiene que en el semiplano superior $\left|\frac{1}{1+z^2} e^{-isz}\right| \leq \frac{1}{R^{1+\alpha}}$.

Hay que usar la curva de la parte baja: $\tilde{C}_R$



luego, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-isx}\,dx = -2\pi i\, Res(f,-i)$

$Res(f,-i) = \lim_{z\to -i} \cancel{(z+i)} \frac{e^{-isz}}{\cancel{(z+i)}(z-i)} = \frac{e^{-i\cdot s\cdot -i}}{-2i} = \frac{-e^{-s}}{2i}$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (\cancel{-}2\pi \cancel{i})\left(\cancel{-}\frac{e^{-s}}{\cancel{2i}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-s} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|}$$

•) $s=0$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ es continua. luego

$\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (por continuidad)

b) Notar que si $g(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2f(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{g'(x)}{2}$

luego, $\hat{f}(s) = -\frac{1}{2}\widehat{g'}(s) = -\frac{1}{2} is\, \hat{g}(s) = -\frac{1}{2} is \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|s|}$

Problema 4 Calcule la serie de Fourier de $f(x) = e^{\alpha x}$, en $[-1,1]$

sol La función no es par ni impar. Entonces calculamos todos los coefs.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\alpha x}dx = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = \frac{\operatorname{senh}(\alpha)}{\alpha}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\cos(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\,\frac{e^{in\pi x}+e^{-in\pi x}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^{(\alpha+in\pi)x} + e^{(\alpha-in\pi)x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+in\pi}\left(e^{\alpha+in\pi} - e^{-\alpha-in\pi}\right) + \frac{1}{\alpha-in\pi}\left(e^{\alpha-in\pi} - e^{-\alpha+in\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+in\pi}\left(e^{\alpha}e^{in\pi} - e^{-\alpha}e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{\alpha-in\pi}\left(e^{\alpha}e^{-in\pi} - e^{-\alpha}e^{in\pi}\right)\right) \qquad \Big\| \; e^{in\pi}=(-1)^n, \; e^{-in\pi}=(-1)^n$$

$$= \frac{(-1)^n}{\alpha+in\pi}\operatorname{senh}(\alpha) + \frac{(-1)^n}{\alpha-in\pi}\operatorname{senh}(\alpha)$$

$$= (-1)^n\operatorname{senh}(\alpha)\,\frac{(\alpha-\cancel{in\pi}+\alpha+\cancel{in\pi})}{(\alpha+in\pi)(\alpha-in\pi)}$$

$$= \frac{2(-1)^n\operatorname{senh}(\alpha)\,\alpha}{\alpha^2+n^2\pi^2}.$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\,\frac{e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}}{2i}\,dx$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_{-1}^{1} e^{(\alpha+in\pi)x}dx - \int_{-1}^{1} e^{(\alpha-in\pi)x}dx\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{i}\,\frac{\operatorname{senh}(\alpha)}{\alpha+in\pi} - \frac{(-1)^n}{i}\,\frac{\operatorname{senh}(\alpha)}{\alpha-in\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n\operatorname{senh}(\alpha)}{i}\,\frac{\cancel{\alpha}-in\pi-\cancel{\alpha}-in\pi}{(\alpha+in\pi)(\alpha-in\pi)} = \frac{-2(-1)^n\,n\pi\,\operatorname{senh}(\alpha)}{\alpha^2+n^2\pi^2}$$

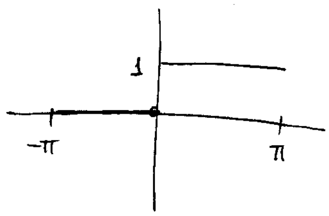
Entonces, la serie de Fourier de $e^{\alpha x}$ será

$$S_f(x) = \frac{\operatorname{senh}(\alpha)}{\alpha} + 2\operatorname{senh}(\alpha)\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2\pi^2}\left(\alpha\cos(n\pi x) - n\pi \operatorname{sen}(n\pi x)\right)$$

La serie es igual a f en $(-1,1)$ = Dom. de diferenciabilidad de f.

<u>Problema</u> 5 Calcule la Serie de Fourier de $f(x) = 1\!\!1_{[0,\pi]}(x)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

<u>Sol</u> Vemos que f no es par ni impar, pero notamos que f se puede escribir como



$$f(x) = \frac{1}{2} + g(x)$$

con $g(x) = -\frac{1}{2} 1\!\!1_{[-\pi,0)}(x) + \frac{1}{2} 1\!\!1_{[0,\pi]}(x)$; función impar

$$\Rightarrow S_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right),$$

$$\text{con } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)}_{\text{función par}} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)}{\pi n}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) = \frac{(1-(-1)^n)}{\pi n} \qquad (\text{pues } \cos(n\pi) = (-1)^n)$$

luego, $S_f(x) = S_{1/2}(x) + S_g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{\pi n}\operatorname{sen}(nx)$

$$S_f(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^-) + f(0^+)\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$S_f(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi) + f(\pi)\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \quad //$$