

Problema 1 a) Considere la curva $\Gamma = \partial D(0, k) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = k\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, orientada en sentido antihorario. Demuestre que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} e^z dz = 2\pi i$$

b) Usando lo anterior, demuestre que

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

sol a) Podemos hacerlo de varias maneras:

(i) Por la fórmula de Cauchy, como $\exp$ es analítica en cualquier disco $D_k = D(0, k)$, se tiene que

$$1 = \exp(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} \frac{\exp(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} e^z dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i = \int_{\Gamma} \frac{1}{z} e^z dz.$$

(ii) Por el teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} e^z dz = 2\pi i \sum_{\substack{P \text{ polo} \\ \text{encerrado por } \Gamma}} \text{Res}\left(\frac{1}{z} e^z; P\right).$$

los polos de $f(z) = \frac{e^z}{z}$ son $p=0$, y además el orden del polo es $n=1$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z}{z} = e^0 = 1$$

$$\text{entonces } \text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^0}{dz^0} \left(\frac{1}{(1-0)!} z \frac{e^z}{z} \right) = 1$$

$$\text{Así, } \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot 1$$

b) la parametrización de Γ es $\gamma(\theta) = k e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\text{entonces } \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) = k i e^{i\theta}$$

$$\text{Así, } \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(\gamma(\theta)) \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{e^{k e^{i\theta}}}{k e^{i\theta}} i k e^{i\theta} d\theta$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} d\theta$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} e^{i k \sin(\theta)} d\theta$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} [\cos(k \sin(\theta)) + i \sin(k \sin(\theta))] d\theta$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta - \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} \sin(k \sin(\theta)) d\theta$$

$$= 2\pi i \quad (\text{por parte (a)})$$

Iguando partes real e imaginaria,

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = 2\pi \quad (*)$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} \sin(k \sin(\theta)) d\theta = 0 \quad (**)$$

Usar identidad (*). Sabemos que $\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases} \quad (\alpha \in [0, \pi])$

Entonces
$$\int_{\theta=0}^{\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta + \underbrace{\int_{\theta=\pi}^{\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta}_I$$

$$I = \int_{\alpha=0}^{\pi} e^{k \cos(\pi + \alpha)} \cos(k \sin(\pi + \alpha)) d\alpha$$

con el cambio de variable
 $\theta = \pi + \alpha, d\theta = d\alpha$

*)

$$= \int_{\alpha=0}^{\pi} e^{k \cos(\pi - \alpha)} \cos(k(-\sin(\pi - \alpha))) d\alpha$$

$$= \int_{\alpha=0}^{\pi} e^{-k \cos(\alpha)} \cos(-k \sin(\alpha)) d\alpha$$

(con: $\beta = \pi - \alpha, d\beta = -d\alpha$)

$$= - \int_{\beta=\pi}^0 e^{-k \cos(\pi - \beta)} \cos(-k \sin(\pi - \beta)) d\beta$$

*)

$$= \int_{\beta=0}^{\pi} e^{k \cos(\beta)} \cos(-k \sin(\beta)) d\beta$$

*) paridad de cos.

$$= \int_{\beta=0}^{\pi} e^{k \cos(\beta)} \cos(k \sin(\beta)) d\beta$$

Entonces,
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\pi} e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = \pi$$

//

(Esto último se puede justificar ADECUADAMENTE usando paridad y comportamiento en torno a π de las funciones seno y coseno).