Auxiliar # Cálculo Avanzado y Aplicaciones HR; GI, VR

Prim '08

Números Complejos

Funciones Analíticas

Series de Potencias

Problema 1 a) Encuentre las funciones analíticas $f = u + iv$ tales que

$$u(x,y) = x^2 - y^2.$$

b) Demuestre que no existen funciones analíticas tales que

$$u(x,y) = x^2 + y^2 , \quad \text{con } f = u + iv.$$

sol a) Por las cond de (CR), si $f$ es analítica en $(x,y)$,

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v & (1) \\ \partial_y u = -\partial_x v & (2) \end{cases}$$

Entonces, por (1), $2x = \partial_y v \Rightarrow v = 2xy + c(x)$

y por (2), $-\partial_x v = -2y + c'(x) \overset{(CR)}{=} -2y$

$$\Rightarrow c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow c(x) = c \quad \text{constante en } \mathbb{C}$$

Entonces, concluimos que $v(x,y) = 2xy + c$

$$\Rightarrow f(x,y) = u + iv = x^2 - y^2 + i2xy + c$$

$$= z^2 + c.$$

b) Supongamos que existe $f = u + iv$ analítica, con $u = x^2 + y^2$. Veamos como sería $v$.

Por cond. (CR),
$$\left\| \begin{array}{ll} \partial_x u = \partial_y v & (1) \\ \partial_y u = -\partial_x v & (2) \end{array} \right.$$

Como en el caso anterior: (1): $2x = \partial_y v \Rightarrow v = 2xy + \phi(x)$

$$\Rightarrow -\partial_x v = -2y - \phi'(x)$$

por (2), $-2y - \phi'(x) = 2y$

$$\Rightarrow \phi'(x) = -4y$$

Esto no puede ocurrir, que una función que solo depende de $x$ dependa de $y$.

$\Rightarrow \nexists f$ analítica tq $u = x^2 + y^2$. //

Problema 2 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, Pruebe que si $f$ es diferenciable en $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $f'(z_0) = 0$.

Sol Recordemos que si $f$ es derivable en $z_0$, entonces por las cond. de Cauchy Riemann,

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) \overset{(CR)}{=} -i\partial_x f(z_0).$$

Ahora, notemos que en este caso, $f$ va de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$, o sea, $v \equiv 0$.

Por lo tanto, $\partial_x v \equiv 0$.

Por otro lado, por (CR), $\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0) = 0$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) = 0 + i0 = 0$$

Problema 3 a) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f$ admite representación en serie de potencias entorno al $0$, y $f$ par. Pruebe que los coeficientes de las potencias impares son nulos.

Sol $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Pdq $a_n = 0$ si $n$ impar.

Como $f$ par, $f(z) = f(-z)$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n (-z)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \underbrace{(1-(-1)^n)}_{\substack{\text{cero si } n \text{ par} \\ \text{dos si } n \text{ impar}}} z^n = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \text{ impar}} a_n z^n = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Definiendo $g(z) = \sum_{n \text{ impar}} a_n z^n$, $g$ es derivable ($g \in C^\infty(\mathbb{C})$), y si se deriva y se evalua en $0$ sucesivamente, se obtiene

$$a_n = 0 \qquad \forall n \text{ impar}. \quad //$$

b) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en $\mathbb{C}$. Suponga que $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, y $f(iy) \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f$ debe ser par.

Sol Primero, por ser $f$ holomorfa, puede ser representada en serie de potencias entorno a $0$.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Ahora, como para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = \overline{f(x)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}' a_n x^n = \sum_{n\geq 0}' \overline{a_n}\, \overline{x^n} = \sum_{n\geq 0}' \overline{a_n}\, x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}' (a_n - \overline{a_n})\, x^n$$

Por el mismo argumento anterior, llamando $g(x)$ la serie anterior, evaluando en 0, derivando y evaluando en 0 sucesivamente, se tiene que $a_n = \overline{a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

También, como para $y \in \mathbb{R}$, $f(iy) \in \mathbb{R}$,

$$\Rightarrow f(iy) = \overline{f(iy)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n (iy)^n = \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n (iy)^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n (\overline{iy})^n$$

$a_n = \overline{a_n}$ parte anterior

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n i^n y^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n (-i)^n y^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}' (-1)^n a_n i^n y^n$$

$y = \overline{y}$, pues $y \in \mathbb{R}$

$\overline{i} = -i$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n i^n \underbrace{(1-(-1)^n)}_{\substack{0 \text{ si } n \text{ par} \\ 2 \text{ si } n \text{ impar}}} y^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \text{ impar}} \tilde{a}_n y^n = 0 \qquad \text{con } \tilde{a}_n = i^n a_n$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_n = 0 \quad \forall n \text{ impar}$$ (mismo argumento de parte (a))

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \text{ impar}.$$

$\Rightarrow f$ es par (por parte (a)). //

Problema 4 Calcule los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ ; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , (c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (2z-1)^n$

Puede serle útil el siguiente resultado:

Si $(a_n)$ es una sucesión de reales positivos tq

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad , \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Sol Recordemos que si la serie tiene la forma $(S) \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-p)^n$ , el radio de convergencia de dicha serie es $R = \frac{1}{L}$ , con $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

a) En esta serie, $a_n = \frac{n!}{n^n}$ , $p=0$.

Usamos el resultado útil (conocido como el criterio del cociente).

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{e} = L$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = \frac{1}{e}$ , por lo que

$$R = \frac{1}{L} = e \quad //$$

b) Aquí la serie no está en forma (S). Vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ impar}}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_k z^k$$

con $a_k = \begin{cases} 1/k! & k \text{ impar} \\ 0 & k \text{ par.} \end{cases}$

Entonces, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

$\Rightarrow R = \infty$

c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 (2z-1)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 2^n (z - \frac{1}{2})^n$

entonces $a_n = n^2 2^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^2 2^n} = 2\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 2.$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$ //

Problemas Encontrar las series de potencias de

a) $(1-z)^{-2}$ en torno a $0$

b) $(1+z^2)^3$ en torno a $0$.

c) $\log(1-z^2)$ en torno a $0$

Sol a) Sabemos que $(1-z)^{-1} = \sum_{n\geq 0}' z^n$ , $|z|<1$.

Derivando, $\frac{+1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}' n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}' (n+1) z^n$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad |z|<1.$$

b) Consideremos $F(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ , $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$

Por un lado, $F'(z) = \frac{-2\cdot 2z}{(1+z^2)^3} = -4z f(z)$.

Por otro lado, $F(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(1-(-z^2))^2}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}' (n+1)(-z^2)^n \qquad |z|<1.$$

$$= \sum_{n\geq 0}^{\infty}' (n+1)(-1)^n z^{2n}$$

$$\Rightarrow F'(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}' (-1)^n n(n+1) z^{2n-1} \qquad |z|<1$$

$$\Rightarrow -4z f(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1) z^{2n-1}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1) z^{2n-2} \quad //$$

c) Sabemos que $\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ , $|z|<1$

entonces $\operatorname{Log}(1-z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$ , $|z|<1$