Clase Auxiliar # Cálculo Avanzado y Aplicaciones Prim'09 HR; GI, VR

(*) Análisis Complejo.

Problema 1 a) Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta$

b) Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\{e^{i\theta}-i\theta\}}\,d\theta$

Sol a) Notemos que si $\Gamma = \{ z = e^{i\theta} \,/\, \theta\in[0,2\pi)\}$, orientada en sentido antihorario, consideremos $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z}dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}}\, i\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta = i\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta$$

Por otro lado, por fórmula de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^z}{z}dz = e^0 = 1 \implies \int_\Gamma \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i$$

$$\implies \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi.$$

b) Notando que $e^{e^{i\theta}-i\theta} = \dfrac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}$, consideremos Γ como antes. Entonces

Considerando $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$,

$$\int_\Gamma g(z)dz = \int_\Gamma \frac{e^z}{z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{2i\theta}}\, i e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta}-i\theta)}\,d\theta$$

Por la fórmula de Cauchy generalizada,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz = \frac{d}{dz}e^z\Big|_{z=0} = e^z\Big|_{z=0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i = i\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi i} e^{e^{i\theta}-i\theta}\,d\theta = 2\pi$$

Problema 2 Sea $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ y $0<\theta<\pi$. Pruebe que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{1-2z\cos(\theta)+z^2}\,dz = \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Sol Podemos factorizar

$$z^2-2z\cos(\theta)+1 = z^2-2z\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)$$
$$= (z-\cos(\theta))^2+\operatorname{sen}^2(\theta)$$
$$= [z-\cos(\theta)-i\operatorname{sen}(\theta)]\,[z-\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta)]$$

Entonces los polos de $f(z)=\dfrac{z^n}{z^2-2\cos\theta\, z+1}$ son

$$p_1 = \cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta) = e^{i\theta}\ ;\quad p_2 = \cos(\theta)-i\operatorname{sen}(\theta) = e^{-i\theta}$$

Ambos polos de orden 1, y encerrados por la curva $\{|z|=2\}=\Gamma$

Así usamos el teorema de los residuos:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_j \operatorname{Res}(f,p_j) = 2\pi i\operatorname{Res}(f,e^{i\theta}) + 2\pi i\operatorname{Res}(f,e^{-i\theta})$$

Problema 3 Evalúe $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos(\theta)}$ para $a>1$.

Sol: consideremos $z = e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi)$. Entonces la integral es en la curva $\Gamma=\{|z|=1\}$, y tenemos los cambios de variable

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}$$

$$\Rightarrow I(a) = \oint_\Gamma \frac{1}{a+\frac{z+1/z}{2}}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_\Gamma \frac{dz}{2az+z^2+1} = \frac{2}{i}\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

$$z^2+2az+1 = z^2+2az+a^2+1-a^2$$
$$= (z+a)^2-(a^2-1) = (z+a)^2 - \sqrt{a^2-1}^{\,2}$$
$$= (z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})$$

los polos de f son $p_1 = \sqrt{a^2-1}-a$, $p_2 = -\sqrt{a^2-1}-a$

de los cuales, el único encerrado por Γ es p_1:

$$|p_1| = \left|\sqrt{a^2-1}-a\right| = \left|(\sqrt{a^2-1}-a)\frac{\sqrt{a^2-1}+a}{\sqrt{a^2-1}+a}\right| = \left|\frac{\cancel{a^2}-1-\cancel{a^2}}{\sqrt{a^2-1}+a}\right| < \frac{1}{a} < 1 \quad //$$

Además, es polo simple. Entonces,

$$\operatorname{Res}(f,p_1) = \lim_{z\to p_1}\frac{\cancel{(z-p_1)}}{\cancel{(z-p_1)}(z-p_2)} = \frac{1}{p_1-p_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}\cancel{-a}+\sqrt{a^2-1}\cancel{+a}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

Por el teorema de los residuos,

$$I(a) = \frac{2}{i}\,2\pi i\operatorname{Res}(f,p_1) = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad //$$

Calculamos los residuos:

$$\cdot)\ \operatorname{Res}(f, e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} \frac{\cancel{(z-e^{i\theta})}\, z^n}{\cancel{(z-e^{i\theta})}(z-e^{-i\theta})} = \frac{(e^{i\theta})^n}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{e^{in\theta}/2i}{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}} = \frac{e^{in\theta}}{2i} \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$\cdot)\ \operatorname{Res}(f, e^{-i\theta}) = \lim_{z \to e^{-i\theta}} \frac{\cancel{(z-e^{-i\theta})}\, z^n}{(z-e^{i\theta})\cancel{(z-e^{-i\theta})}} = \frac{e^{-in\theta}/2i}{(e^{-i\theta}-e^{i\theta})/2i}$$

$$= \frac{-e^{-in\theta}}{2i\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{1}{2i} \left(e^{in\theta} - e^{-in\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \operatorname{sen}(n\theta).$$

//

Problema 4 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera, tal que $\forall z \in \mathbb{C}$,

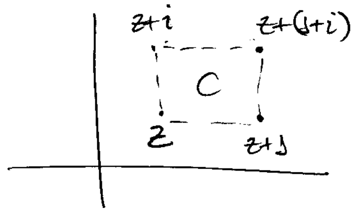
$$f(z) = f(z+1) = f(z+i).$$

Pruebe que f es constante.

Sol: Vemos que por las condiciones,

$$f(z+1) = f((z+1)+i) = f(z+(1+i)).$$

Entonces, gráficamente se tiene que f en los cuatro puntos del cuadrado C vale lo mismo.



Además, como C (el cuadrado con sus bordes incluidos) es compacto, $|f|$ alcanza su máximo y su mínimo en C,

o sea, $\exists K > 0$ tq $|f(z)| \leq K \quad \forall z \in C$. (está acotada).

Como $\mathbb{C}$ puede ser recubierto por infinitos cuadrados de la forma anterior, siendo la situación periódica, entonces

$$\exists K > 0 \text{ tq } \forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| < K$$

Por el teorema de Liouville, se concluye que f es constante.