UChile	**Cálculo Avanzado y Aplicaciones**	**Hector Ramirez**
FCFM	**MA2002-4**	**Germán Ibarra**
DIM	**Prim'09**	**Víctor Riquelme**

Clase Auxiliar 7

Problema 1 **(a)** *Encuentre las funciones analiticas* $f = u + \imath v$ *tales que* $u(x, y) = x^2 - y^2$

(b) *Demuestre que no existen funciones analiticas* $f = u + \imath v$ *tales que* $u(x, y) = x^2 + y^2$

Sol.

(a) Usamos las condiciones de Cauchy-Riemann ((CR)): si $f = u + \imath v$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \qquad (CR_1) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0) \qquad (CR_2) \end{aligned}$$

Por (CR_1), tenemos que $\partial_y v = 2x$, de donde $v = 2xy + k(x)$, y por (CR_2) aplicado a lo anterior, $-\partial_x v = -2y - k'(x) = -2y$. Entonces $k'(x) = 0$, de donde $k(x) = k$ es constante en $\mathbb{C}$
Concluimos que $v(x, y) = 2xy + k$, y asi $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy + ik = z^2 + ik$, con $k \in \mathbb{R}$.

(b) Supongamos que existe una funcion f analitica tal que cumple lo del enunciado. Por (CR_1), tenemos que $\partial_y v = 2x$, de donde $v = 2xy + k(x)$, y por (CR_2) aplicado a lo anterior, $-\partial_x v = -2y - k'(x) = 2y$. Entonces $k'(x) = -4y$. Esto no puede ocurrir, pues k que solo depende de x, esta dependiendo de y, llegando a una contradiccion.

Problema 2 *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. *Pruebe que si* f *es diferenciable (complejo) en* $z_0 \in \mathbb{C}$, *entonces* $f'(z_0) = 0$.

Sol. Si f es diferenciable en z_0, entonces por las condiciones de (CR) se tiene que

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = -\imath \partial_y f(z_0)$$

Como f solo toma valores reales, $v \equiv 0$, por lo tanto, $\partial_x v \equiv \partial_y v \equiv 0$.
Por (CR), $\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0) = 0$, de donde

$$f'(z_0) = \partial_x u(z_0) + \imath \partial_x v(z_0) = 0 + \imath 0 = 0$$

Problema 3 **(a)** *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* f *admite representacion en serie de potencias en torno a* $z_0 = 0$, *y* f *es par. Pruebe que los coeficientes de las potencias impares de la representacion en serie de potencias de* f *son nulos.*

(b) *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa en* $\mathbb{C}$ *(que admite representacion en serie de potencias en torno a cualquier punto). Suponga que* $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$ *y* $f(iy) \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}$. *Pruebe que* f *debe ser par.*

Sol.

Problema 4 *Calcule los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:*

(i) $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

(ii) $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iii) $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n$

Puede serle util el siguiente resultado: Si (b_n) es una sucesion de reales positivos tales que $\lim_{n\nearrow\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = L$ entonces $\lim_{n\nearrow\infty} \sqrt[n]{b_n} = L$.

Sol. Recordamos que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ (forma estandar), entonces el radio de convergencia de la serie es $R = \frac{1}{L}$, donde $L = \limsup_{n\nearrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ademas, por el resultado del enunciado, cundo es dificil calcular este limite, podemos calcular el limite $L' = \limsup_{n\nearrow\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y tendremos que $L = L'$ (este ultimo es el criterio del cuociente).

(i) La serie esta en forma estandar, con $p = 0$ y $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Usamos el criterio del cuociente:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\\ &= \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}\frac{n^n}{n!}\\ &= \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}\\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\end{aligned}$$

Entonces $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = e^{-1} = L$, y $R = L^{-1} = e$

(ii) Aqui la serie no esta en forma estandar, por lo que hay que "estandarizarla":

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$$

donde $p = 0$ y $a_n = 0$ si n es par y $a_n = \frac{1}{n!}$ si n es impar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}L &= \limsup_{n\nearrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\\ &= \lim_{n\nearrow\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces, $R = L^{-1} = \infty$.

(iii) Aqui la serie no esta en forma estandar:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n = \sum_{i=0}^{\infty} n^2 2^n \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

Notamos que $p = \frac{1}{2}$ y $a_n = n^2 2^n$.
Calculamos $L = \limsup_{n\nearrow\infty} \sqrt[n]{n^2 2^n} = \lim_{n\nearrow\infty} 2\sqrt[n]{n^2} = 2(\lim_{n\nearrow\infty} \sqrt[n]{n})^2 = 2$
Por lo tanto, $R = \frac{1}{2}$.

Problema 5 *Encontrar la series de potencias de las siguientes funciones en torno a $z_0 = 0$:*

(i) $(1-z)^{-2}$

(ii) $(1+z^2)^{-3}$

(iii) $Log(1-z^2)$

Sol.